Departamento
de Engenharia
Electrotécnica e
de Computadores

Trabalho Final de Curso

Modelos para Distribuições Espaciais e Temporais de Tráfego em GSM

Sandra Almeida
José Queijo

Setembro de 1998

Trabalho realizado sob a orientação de

Professor Luís M. Correia

Secção de Propagação e Radiação

Departamento de Engenharia Electrotécnica e Computadores

Instituto Superior Técnico

"*A dropped call is*
a dropped customer."

Nortel

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaríamos de agradecer ao Professor Luís Correia, não só pelo nível de exigência, a disponibilidade que sempre mostrou e os bons conselhos que deu mas, sobretudo, pelo exemplo que é.

Agradecemos à Telecel a cedência dos dados de tráfego e aos nossos colegas Valentina Garcia, Lívio Santos e Lúcio Ferreira pelas explicações e tratamento inicial dos dados.

Agradecemos aos nossos colegas do Grupo Móvel pela partilha das horas boas e menos boas. Queremos igualmente agradecer à D. Isabel, D. Olívia, Jorge e a toda a equipa da Secção de Propagação e Radiação e da Biblioteca do DEEC pelo apoio dado, quer este ano, quer ao longo do curso.

O nosso muito obrigado ao INESC por tornar estes últimos anos memoráveis e, em especial, à Elsa, ao Michel, ao Miguel e ao Nuno pelo apoio sem limites e amizade incondicional.

Finalmente, gostaríamos de agradecer às nossas famílias que, ao longo deste ano, aceitaram a nossa ausência e sempre nos animaram nas horas mais difíceis. Um beijinho especial para a João, por ser fã do nosso trabalho desde o primeiro dia.

Resumo

Neste trabalho analisa-se o tráfego de sistemas móveis celulares e apresentam-se modelos para as suas variações temporal e espacial.

Analisam-se dados de tráfego de 199 células de GSM, da área de Lisboa. Estabelecem-se modelos normalizados de variação temporal para diferentes zonas geográficas: centro, residencial e suburbana. Verifica-se que, para todas as classes, a forma do tráfego é bem modelada pela função duas gaussianas, com picos às 11h 30m e às 16h 50m. A distinção entre diferentes classes deve-se, sobretudo, à amplitude de densidade de tráfego: cerca de 30 Erl/km^2 no centro urbano, 10 Erl/km^2 em zonas residenciais e 3 Erl/km^2 em zonas suburbanas, verificando-se no entanto uma grande dispersão das amplitudes.

Apresentam-se para a hora de ponta e para três sectores com geografia distinta, dois modelos para o decaimento da densidade de tráfego com a distância: o modelo exponencial / linear, com um factor de decaimento entre 1.22 e 2.38 km, e o modelo linear por troços, com declives iniciais da ordem de 34 (Erl/km^2)/km. Ambos os modelos assumem densidade de tráfego constante nas zonas periféricas (cerca de 5 % do valor no centro).

Analisando a variação temporal da distribuição espacial de tráfego, verifica-se que o parâmetro que mais varia é a amplitude, apresentando um comportamento semelhante em toda a área.

A partir dos modelos temporais e espaciais apresentados, estabelece-se um modelo de densidade de tráfego onde a amplitude é dada pelo modelo de variação espacial e a forma é dada pelo modelo temporal de duas gaussianas. Este modelo tem melhor desempenho para as áreas de centro urbano e residencial, com erros da ordem de 30 %, verificando-se erros mais elevados para as zonas suburbanas, devido à grande dispersão de amplitudes encontrada.

Palavras Chave

GSM; Tráfego; Planeamento Celular; Modelos Temporais; Modelos Espaciais.

Abstract

In this work, traffic of mobile cellular systems is analysed and models for its spatial and temporal variations are presented.

Traffic data from 199 GSM cells, from the Lisbon area are analysed. Normalised models are obtained for the temporal distribution of traffic from different geographical classes: city centre, residential area and suburban area. It is observed that the traffic shape may be well modelled by a double-Gaussian function with peaks at 11h 30m and 16h 50m. The difference between geographical classes is mainly reflected in their peak values: approximately 30 Erl/km^2 in the city centre, 10 Erl/km^2 in residential and 3 Erl/km^2 in suburban areas, notwithstanding, however, high values for the standard deviation.

For the peak hour and for three sectors with distinct characteristics, two models are presented for the decrease in traffic density with distance: the exponential / linear model, with a decay factor between 1.22 and 2.38 Erl/km^2, and the piecewise linear model, with an initial slope around 0.7 (Erl/km^2)/km. Both models assume a constant traffic density for peripheral regions (about 5 % of the centre value).

The temporal variations of spatial traffic distribution is analysed, noting that the main variation lies in its amplitude whereas the spatial variation of traffic remains roughly distributed with in the same proportions throughout the day.

Combining the temporal and spatial models previously presented, a traffic density model is developed, being its peak traffic values taken from the spatial model and its shape from the double-Gaussian temporal model. This model gives better results for city centre and residential areas, with errors around 30 %, being observed worst results for suburban areas, due primarily to the disparity found in the different cases studied.

Keywords

GSM; Traffic; Cellular Planning; Temporal Models; Spatial Models.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Lista de Siglas

BSC	*Base Station Controller*
BTS	*Base Transceiver Station*
CDMA	*Code Division Multiple Access*
EB	Estação Base
FDMA	*Frequency Division Multiple Access*
GoS	*Grade of Service*
GSM	*Global System for Mobile Communications*
MSC	*Mobile Switching Centre*
TDMA	*Time Division Multiple Access*

Lista de Símbolos

a	tráfego normalizado
A	tráfego
Al	constante da função linear
Alt	declive do primeiro troço da função linear por troços
$\overline{A_{util}}$	tráfego médio por utilizador
Bl	declive do modelo linear
Blt	constante do segundo troço da função linear por troços
c	constante da função trapézio
Cel	constante da função exponencial / linear
Clt	declive do segundo troço da função linear por troços
d	distância
da	densidade de tráfego normalizada
dA	densidade de tráfego
d_n	distância ao centro
$d.p._{sector}$	desvio padrão dos perfis de cada sector
dq	ponto de quebra da função exponencial / linear
dq_1	primeiro ponto de quebra da função linear por troços
dq_2	segundo ponto de quebra da função linear por troços
d_t	desvio da função trapézio
d_1	desvio da primeira gaussiana da função duas gaussianas
d_2	desvio da segunda gaussiana da função duas gaussianas
De	factor de decaimento da função exponencial
Del	factor de decaimento da função exponencial / linear
Dlt	constante da função linear por troços
$e.q.m.$	erro quadrático médio
$\overline{e.q.m.}$	média do erro quadrático médio

$e.q.r.$	erro quadrático relativo médio
$\overline{e.q.r.}$	média do erro quadrático relativo médio
h_{alm}	hora de almoço da função duas gaussianas
h_t	hora do centro da função trapézio
h_1	hora de pico da manhã
h_2	hora de pico da tarde
N_{pop}	população da área de serviço
p	peso da gaussiana da função trapézio
p_1	peso da gaussiana da manhã
p_2	peso da gaussiana da tarde
Pb	probabilidade de bloqueio
t	tempo
t_{desv}	tempo desviado
t_{pen}	taxa de penetração
tq_1	primeiro ponto de quebra da função trapézio
tq_2	segundo ponto de quebra da função trapézio
t_{util}	taxa de utilização

1. Introdução

Nos últimos anos tem-se assistido a um enorme crescimento das telecomunicações, que são hoje um factor essencial no desenvolvimento das sociedades. A necessidade das pessoas comunicarem entre si é cada vez maior e mais exigente, quer em termos de capacidade quer em termos acessibilidade.

Dentro do sector das telecomunicações, as comunicações móveis são um caso de particular sucesso, sem dúvida devido ao inegável valor acrescentado que representam. Rapidamente, a mobilidade passou de uma mais-valia a um requisito do qual as pessoas já não abdicam. O telefone móvel é, cada vez mais, um objecto indispensável no quotidiano de milhões de pessoas, tanto para uso profissional, como, e cada vez mais, para uso pessoal.

O surgimento do GSM como um *standard* europeu permitiu que as comunicações móveis atingissem o estado de desenvolvimento actual, possibilitando economias de escala e melhorias significativas na qualidade do serviço. Num curto espaço de tempo, o GSM tornou-se a referência em sistemas móveis à escala mundial.

Em Portugal, nos últimos anos, o número de utilizadores de GSM tem duplicado de ano para ano, atingindo hoje 20 % da população. A principal preocupação das operadoras deixou de ser a cobertura de exteriores, passando a ser o fornecimento de capacidade: o número de utilizadores é cada vez maior e o uso do telefone celular está banalizado. O constante aumento de tráfego resulta na redução dos raios das células que, em alguns casos, atingem apenas algumas centenas de metros.

Face a estas exigências, a evolução das redes celulares passa, necessariamente, pela optimização dos recursos, sendo o conhecimento das características do tráfego essencial no processo. O objectivo deste trabalho é estudar a variação temporal e espacial do tráfego em zonas urbanas. Pretende-se desenvolver modelos simples e de aplicação imediata que traduzam a distribuição de tráfego para várias zonas ao longo do dia. Estes modelos possibilitam que se possa efectuar um melhor planeamento da rede celular, prevendo a evolução do tráfego, e permitindo a contabilização das variações temporal e espacial.

Para o desenvolvimento deste trabalho foram utilizados dados de tráfego cedidos pela empresa operadora de GSM Telecel. Os dados, relativos a 199 células, na área da Grande Lisboa, consistem em valores de tráfego para 3 dias úteis e um mapa com as respectivas áreas de cobertura.

No Capítulo 2, analisam-se conceitos fundamentais para a descrição e análise do tráfego. Começa-se com uma breve introdução sobre os sistemas de comunicações móveis celulares, com especial incidência no GSM. Em seguida, discute-se a teoria do tráfego e as principais particularidades do tráfego de sistemas móveis celulares. Apresentam-se alguns resultados encontrados na escassa literatura sobre a variação temporal e espacial do tráfego. Finalmente, descreve-se o planeamento celular com particular incidência nas questões mais influenciadas pelo tráfego.

No Capítulo 3 é feita a análise temporal dos dados de tráfego. As curvas de tráfego são aproximadas por funções apropriadas e agrupadas em classes geográficas. A partir das aproximações são desenvolvidos modelos normalizados e, numa fase seguinte, modelos de densidade de tráfego.

No Capítulo 4, procede-se à análise da distribuição espacial do tráfego. Apresentam-se modelos para a variação espacial na hora de ponta e estuda-se a variação temporal da densidade de tráfego. Apresenta-se um modelo espacial / temporal para a descrição das variações de densidade de tráfego no sistema. Finalmente, relaciona-se o tráfego verificado com a distribuição populacional no concelho de Lisboa.

O Capítulo 5 contém as conclusões, após o que se apresentam alguns anexos, contendo o mapa de cobertura, dados sobre as células e resultados estatísticos dos modelos desenvolvidos.

2. Conceitos Fundamentais

2.1. Sistemas Móveis Celulares

2.1.1. Principais Características

Nos últimos anos, as comunicações móveis cresceram bastante, atingindo hoje um mercado maior do que todas as expectativas. Um dos factores responsáveis por este sucesso é a capacidade destes sistemas, possível devido à aplicação do conceito celular.

O conceito celular permitiu a grande expansão dos sistemas móveis de telecomunicações, já que veio dar solução à principal limitação dos sistemas que recorrem a ligações via rádio: a limitação de espectro. Classicamente, o aumento do número de ligações possível e, consequentemente, do número de utilizadores era feito à custa da atribuição de mais banda para o sistema, sendo a sua relação directamente proporcional.

Um sistema celular organiza-se geograficamente em células, cada uma cobrindo uma dada área e servida por uma estação base, EB. As células são agrupadas em grupos de N_{cg} células, idênticos a um padrão celular, dentro dos quais se utilizam todos os canais rádio disponíveis. É a repetição do padrão celular que permite cobrir toda a área pretendida com um aumento significativo da capacidade total do sistema, sendo as frequências reutilizadas em em padrões celulares diferentes. Na Figura 2.1 apresenta-se um exemplo da distribuição de canais rádio num sistema celular com células hexagonais e um padrão de sete células, onde cada cor representa um padrão celular e cada número representa um grupo de frequências. Para uma descrição mais aprofundada da estrutura celular dos sistemas móveis celulares pode-se consultar [1] ou [2].

O número de células do padrão celular é limitado inferiormente por questões de interferência, já que quanto mais próximas estiverem duas células que utilizem a mesma frequência, maior será a interferência. Por outro lado, quanto maior for N_{cg}, menor será o número de canais disponível por célula, limitando a capacidade do sistema. Assim, tanto a

escolha do padrão celular como a do raio da célula é feita num compromisso entre capacidade e interferência.

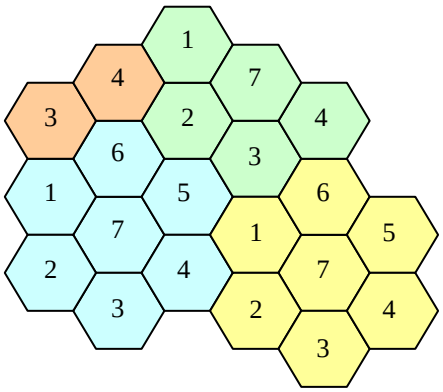


Figura 2.1 – Distribuição de frequências num sistema celular com um padrão de sete células.

Note-se que a limitação de canais e, por conseguinte do número de utilizadores, ocorre ao nível da célula e não do sistema, pelo que é possível aumentar a capacidade total simplesmente diminuindo o tamanho das células. Hoje em dia, assiste-se à existência de micro-células com raios de algumas centenas de metros nas áreas de centro urbano, de modo a fornecer a capacidade exigida em certos locais.

A capacidade total do sistema depende do modo como os recursos espectrais são distribuídos, sendo actualmente usadas as seguintes técnicas de acesso:

- Acesso múltiplo por divisão na frequência, FDMA[1] - A banda total é dividida em porções mais pequenas, cada uma ocupada por um canal.
- Acesso múltiplo por divisão no tempo, TDMA[2] - O tempo é dividido em porções, *time slots*, dentro das quais, o utilizador pode utilizar toda a banda disponível.
- Acesso múltiplo por divisão no código, CDMA[3] - Os vários canais coexistem na mesma banda e ao mesmo tempo, sendo diferenciados por uma modulação com códigos diferentes e ortogonais entre si.

Os primeiros sistemas móveis celulares eram analógicos, utilizando FDMA como técnica de acesso múltiplo, tendo-se evoluído para sistemas digitais que recorrem a uma das técnicas referidas ou combinações das mesmas.

[1] Do inglês *Frequency Division Multiple Access.*

[2] Do inglês *Time Division Multiple Access.*

[3] Do inglês *Code Division Multiple Access*

2.1.2. GSM

Largamente difundido no mundo, o GSM (*Global System for Mobile communications*), foi definido em 1987/88 por parte de entidades europeias, antes que existisse outro sistema de comunicações móveis celular digital em funcionamento na Europa.

Este sistema foi adoptado pela maioria dos países europeus como sistema de base para a implementação das suas redes móveis digitais, levando a uma larga e rápida difusão, o que, para além de ditar o sucesso comercial do GSM, acarretou várias vantagens para utilizadores e fabricantes. A difusão do sistema significa compatibilidade entre redes de diferentes operadores, permitindo que um utilizador possa usar o mesmo terminal numa área geográfica que presentemente, se estende a todo o planeta, com especial incidência na Europa. O número de utilizadores que aderiu ao sistema permitiu, por outro lado, que o equipamento fosse cada vez mais barato.

Toda esta conjectura favorável leva a que, hoje em dia, já se fale em ultrapassar as taxas de penetração da rede fixa a médio prazo, tendo já entrado em funcionamento em vários países o GSM na banda de 1800 MHz, uma evolução compatível do sistema que permite aumentar a sua capacidade. Em seguida, descreve-se sumariamente o funcionamento e estrutura do GSM, Figura 2.2 (para mais detalhes pode-se consultar [3] ou [4]).

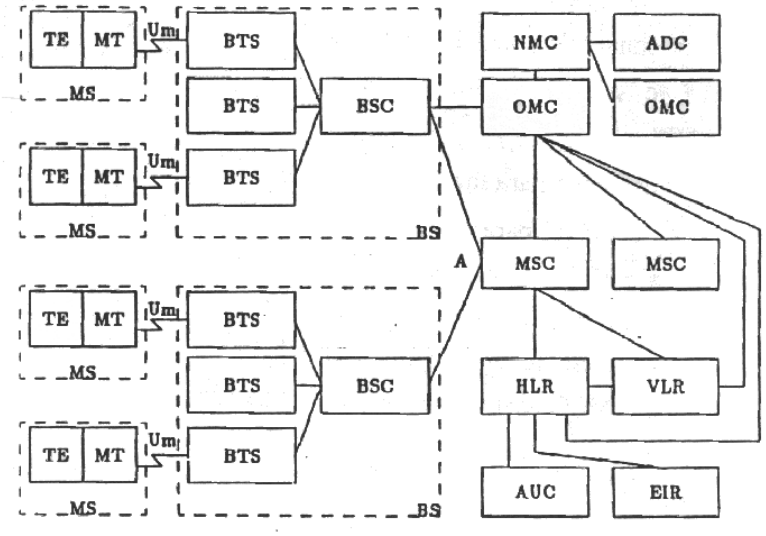


Figura 2.2 – Esquema simplificado do GSM (extraído de [3]).

Cada célula possui uma estação base, constituída por um ou mais transceptores, BTS[4], cada um associado a uma frequência e um controlador de estação base, BSC[5]. Várias BTSs

[4]Do inglês *Base Transceiver Station.*

[5]Do inglês *Base Station Controller.*

são ligadas a um centro de comutação móvel, MSC[6], responsável por todas as funções de comutação entre as células que serve.

A comunicação entre o terminal móvel e a EB é feita na banda de 900 ou 1800 MHz, combinando as técnicas FDMA e TDMA. Na banda de 900 MHz, a largura de banda total é de 25 MHz (em cada sentido da ligação) e em 1800 MHz é de 75 MHz, encontrando-se as bandas divididas, respectivamente, em 124 e 372 portadoras. Cada portadora, por sua vez, é dividida em oito *time slots*, cada um correspondente a um canal físico. Cada canal físico é definido por uma frequência de portadora e um número de *time slot*, podendo transportar vários canais lógicos com informação de utilizador e informação de controlo.

Num sistema móvel como o GSM, existe uma grande quantidade de tráfego de sinalização e controlo, cujas funções se prendem com a localização de utilizadores, estabelecimento e manutenção da ligação rádio (recorrendo a controlo de potência e de atraso de transmissão), realização de *handover*[7], etc. Em cada célula existem normalmente dois canais físicos destinados exclusivamente à informação de sinalização e controlo, sendo a restante informação transmitida em canais não dedicados (de 22.4 kbps reais por canal, apenas 13 kbps são de tráfego de utilizador).

2.2. Tráfego

Os sistemas celulares, devido às suas particularidades, apresentam um tráfego com características distintas do tráfego de redes fixas. No entanto, a teoria desenvolvida para a rede fixa, [5], [1], pode ser aplicada numa primeira aproximação ao tráfego de redes celulares. O tráfego é medido em Erlang, nome do matemático que desenvolveu a teoria do tráfego, correspondendo a unidade a um canal (circuito) ocupado durante uma hora. Pode-se, então, calcular o tráfego médio de um sistema, *A*, através da seguinte expressão:

$$A_{[Erl]} = \frac{N_{ch}/h \times \overline{T_{chamada}}}{3600\ \mathrm{s}} \tag{2.1}$$

onde:

N_{ch}/h é o número de chamadas efectuado numa hora;

$\overline{T_{chamada}}$ é a duração média de uma chamada.

[6]Do inglês *Mobile Switching Centre*.

[7]Transferência da ligação entre EBs em tempo real.

Em qualquer sistema de telecomunicações, não é aceitável fornecer tantos canais quanto o número de utilizadores, já que é muito pouco provável que todos queiram usar os serviços em simultâneo. Em vez disso, o número de canais é escolhido num compromisso entre a utilização máxima dos recursos e o número mínimo de chamadas sem sucesso.

Dado o tráfego oferecido a uma rede e o seu número de canais, *N*, é possível determinar a probabilidade de um utilizador não conseguir aceder à rede, probabilidade de bloqueio, *Pb*:

$$Pb(A,N) = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=0}^{N} \frac{A^i}{i!}} \tag{2.2}$$

Esta expressão, conhecida na literatura como fórmula de Erlang-B, é obtida supondo que uma chamada bloqueada é perdida (o utilizador terá de tentar aceder à rede novamente) e que a taxa de geração de chamadas segue uma distribuição de Poisson, o que é válido apenas para uma população infinita. No caso mais realista de se assumir uma população finita de *M* utilizadores, a probabilidade de bloqueio pode ser dada pela expressão de Engset:

$$p_N = \frac{\binom{M}{N} \cdot A^N}{\sum_{i=0}^{N} \binom{M}{i} \cdot A^i} \tag{2.3}$$

A probabilidade de bloqueio também é designada por grau de serviço, *GoS*[8], e é escolhida pelo operador como um compromisso entre qualidade de serviço e custos. A probabilidade de bloqueio tem valores típicos da ordem de 1 %, sendo normalmente estimada a partir da expressão de Erlang-B, (2.2).

A principal característica dos sistemas celulares, a mobilidade, influencia bastante o tráfego porque o número de utilizadores dentro de uma célula deixa de ser fixo. Para além disso, no caso de sistemas que permitem o *handover*, o tráfego de uma chamada deixa de estar obrigatoriamente associado a uma única célula, Figura 2.3. Como consequência, é mais difícil manter o grau de serviço pretendido e efectuar um correcto planeamento da rede. Por estas

[8]Do inglês *Grade of Service.*

razões, interessa conhecer as características do tráfego originado na célula e do tráfego originado por *handover*, bem como modelar a mobilidade dos utilizadores.

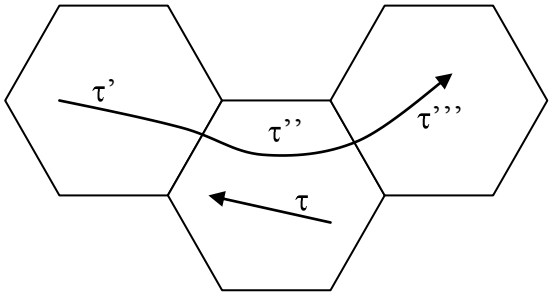


Figura 2.3 - Exemplo de tempo de duração de uma chamada e tempo de ocupação de um canal numa célula.

Um estudo teórico realizado para caracterizar, do ponto de vista temporal, o tráfego móvel é feito em [6]. O tempo de permanência de um utilizador numa célula pode ser modelado por uma distribuição exponencial no caso de células grandes, caso em que a aproximação de utilizadores com velocidade constante e direcções igualmente distribuídas no intervalo $[0,2\pi]$ é válida. Para células mais pequenas (caso de muitas das células em centros urbanos), ou contendo importantes eixos rodoviários, esta aproximação deixa de ser válida, podendo o tempo de permanência ser melhor modelado por uma distribuição gaussiana, de Erlang-k ou gaussiana truncada [7].

Em [6], assumindo que o tempo de duração de uma chamada, τ, e o tempo de permanência de um terminal numa dada célula, τ_h, são dados por uma distribuição exponencial, conclui-se que o tempo de ocupação de um canal de uma célula, τ_c=mín(τ, τ_h), segue também uma distribuição exponencial, permitindo juntar, numa só distribuição, o tráfego originado na célula e o tráfego com origem em *handover*.

2.3. Variação Temporal do Tráfego

O planeamento e avaliação das redes de telecomunicações é, normalmente, feito para a hora de ponta, existindo estudos sobre a evolução a longo prazo do pico de tráfego, Figura 2.4, o crescimento médio do tráfego e as suas variações sazonais, [8].

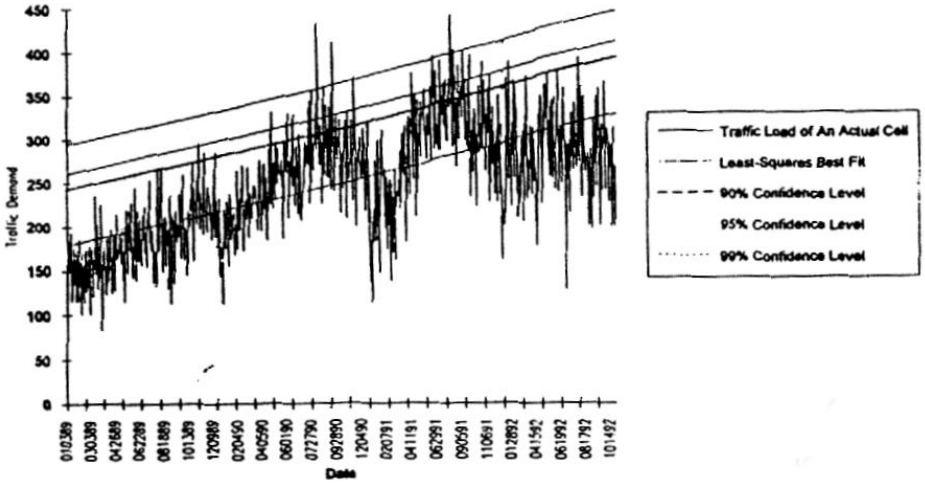


Figura 2.4 – Variação do pico de tráfego diário ao longo de 4 anos (extraído de [8]).

A variação do tráfego de uma célula ao longo do dia, é razoavelmente conhecida, Figura 2.5, no entanto não se encontram estudos aprofundados nesta área. A análise do tráfego ao nível da célula é bastante importante porque permite estimar o nível de ocupação dos recursos do sistema para diferentes horas e ter uma ideia da eficiência da rede.

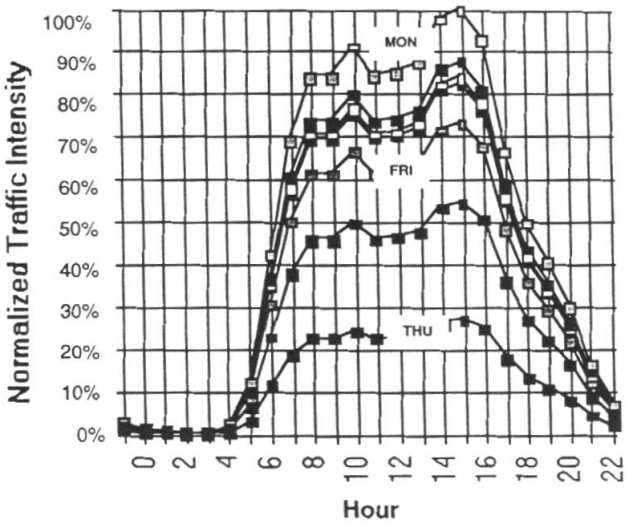


Figura 2.5 - Distribuição típica de tráfego de um sistema celular para diferentes dias da semana (extraído de [5]).

As variações do tráfego de uma célula devem-se a vários parâmetros directamente relacionados com os utilizadores, tais como:

- número de utilizadores na célula
- grau de actividade dos utilizadores
- grau de mobilidade dos utilizadores

Existem vários estudos sobre a variação temporal do tráfego incidindo sobre os parâmetros que definem o tráfego ao nível do utilizador, tais como estatística da geração de novas chamadas, tráfego de *handover*, modelos de mobilidade, etc., com conclusões relativas ao tráfego ao nível da chamada. Estes resultados não são analisados porque se pretende que este trabalho incida sobre o estudo do tráfego registado na célula e não tanto na análise da estatística do tráfego ao nível do utilizador.

2.4. Variação Espacial do Tráfego

Para o estudo da distribuição espacial de tráfego, é habitual analisar-se em vez do tráfego absoluto, a densidade de tráfego, que é uma grandeza que está directamente ligada à geografia da área, embora dependa de muitos outros factores.

A distribuição espacial de tráfego numa zona urbana é fortemente não uniforme, sendo usualmente descrita por uma função exponencial decrescente, [9], [10], desde o centro e com geometria radial. Há locais que, pelas suas características, originam grande tráfego, como é o caso de centros comerciais e eixos rodoviários, o que resulta em picos de tráfego localizados que se sobrepõem à variação tipicamente exponencial já referida.

O método normalmente empregue para estimar ou analisar a densidade de tráfego numa determinada área, consiste na divisão da área em elementos, dentro dos quais se considera a densidade de tráfego constante. Esta divisão pode ser feita por sobreposição de uma grelha sobre a área, resultando em elementos de iguais dimensões, ou agrupando áreas onde a geografia seja semelhante e portanto, mais facilmente classificável.

Em [11] sugere-se uma abordagem para a obtenção de um modelo de densidade de tráfego. A partir da divisão da área total em elementos, o tráfego total é dado por:

$$A = \sum_j a(P_j) \cdot d_j^{\,2} \tag{2.4}$$

onde:

A	é o tráfego total da área de serviço;
$a(P_j)$	é a densidade de tráfego no elemento P_j;
d_j^2	é a área do elemento P_j.

Se se pretender analisar o tráfego de uma célula, e considerando que a escolha da estação de base por parte do terminal móvel não é unívoca, pode-se rescrever (2.4) na forma:

$$A_i = \sum_{P_j \in Z_i} a(P_j) \cdot d_j^{\,2} \cdot p_A(P_j, Z_i) \qquad (2.5)$$

onde:

A_I é o tráfego da célula Z_i;

$p_A(P_i,Z_i)$ é a probabilidade de uma chamada de / para o elemento P_j ser feita através da célula Z_i.

Como na prática é difícil determinar a densidade de tráfego por elemento, é sugerido fazer uma estimativa com base em parâmetros como, por exemplo, o tipo de edifícios, área coberta, existência de estradas, etc. Procedendo deste modo, obtém-se um modelo dependente apenas da morfologia do terreno e que é facilmente aplicável a outro cenário.

Em [11] refere-se ainda que, numa rede real, a densidade de tráfego é fortemente dependente de parâmetros ainda não considerados e, algumas vezes dificilmente quantificáveis, como o tamanho da cidade, a taxa de penetração do operador e diferenças regionais no comportamento dos utilizadores.

2.5. Planeamento

O planeamento de um sistema de comunicações móveis celular é feito atendendo a dois factores: a propagação, que depende da morfologia do terreno, e o tráfego. A atenuação devido à morfologia é o factor limitativo quando se pretende fornecer cobertura numa dada área sem grandes preocupações de capacidade, caso de zonas com baixa densidade populacional. No caso de zonas com elevado índice de ocupação do terreno, é o tráfego que, em princípio, limita a dimensão das células. Como já foi referido, nas zonas onde a densidade de tráfego é muito elevada, e para se obter o grau de serviço desejado, reduz-se a dimensão das células, já que a largura de banda está limitada à partida. As assimetrias na densidade de tráfego conduzem muitas vezes a uma estrutura celular mista do tipo micro / macro-células, num compromisso entre complexidade e eficiência. Uma estrutura deste tipo pode, no entanto, apresentar problemas de interferência, pelo que é importante conhecer as características do outro factor limitativo, o tráfego, de modo a optimizar a rede.

Como já foi referido, o planeamento celular é feito considerando o tráfego apenas relativo à hora de ponta. Para se estimar o tráfego, geralmente recorre-se a uma distribuição populacional tão realista quanto possível para a hora de ponta do sistema. Pode-se obter a

distribuição através de estatísticas da população, dados sobre movimentos pendulares, informações sobre actividades económicas, etc. A partir desta distribuição e de indicadores do mercado, pode-se estimar o tráfego oferecido à rede através da expressão (2.5), [2]:

$$A_{[Erl]} = N_{pop} \cdot t_{pen} \cdot t_{util} \cdot \overline{A_{util}}_{[Erl]} \qquad (2.5)$$

onde:

N_{pop} é a população da área de serviço;

t_{pen} é a taxa de penetração do operador;

t_{util} é a taxa de utilização da rede em hora de ponta;

$\overline{A_{util}}$ é o tráfego médio por utilizador.

A partir da estimativa de tráfego e usando a expressão de Erlang-B, é possível calcular a capacidade que uma célula deve oferecer de modo a garantir o GoS pretendido. No entanto, e como já foi referido, a atribuição de canais depende da técnica de acesso do sistema. O GSM usa uma técnica de acesso mista FDMA / TDMA, com cada frequência dividida em oito *time slots*, pelo que a atribuição de canais é feita em saltos de oito. Assim, o número de canais que é possível encontrar numa célula não varia de modo contínuo, sendo os valores possíveis 6, 14, 22, etc. (2 dos canais são para sinalização). Isto significa que, para manter o GoS pretendido, algumas das células estão sobredimensionadas em termos de capacidade. Em [11] este assunto é estudado com base em dados de um sistema real. Foi obtida a média do tráfego em hora de ponta para células com o mesmo número de canais, e em seguida calculada a sua capacidade através da expressão de Erlang-B, de modo a determinar a taxa de ocupação em função do número de frequências da célula, Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Ocupação média relativa da célula numa rede GSM (extraído de [8]).

Nº de Frequências da Célula	1	2	3	4
Nº de Canais de Tráfego	6	14	22	30
Capacidade da Célula [Erl]	1.9	7.4	13.7	20.4
Tráfego Médio da Célula [Erl]	1.0	3.9	9.7	15.9
Ocupação Relativa Média da Célula [%]	52	53	71	78

Como se pode observar, o tráfego em hora de ponta é bastante inferior à capacidade total da célula, sendo a taxa de ocupação pior quanto menor for o número de frequências da célula.

3. Distribuição Temporal

3.1. Descrição dos Dados e Ambiente de Estudo

Os dados foram fornecidos pela operadora de GSM Telecel e são relativos ao primeiro semestre de 1997, consistindo em valores de tráfego referentes a 199 estações base da área metropolitana de Lisboa e um mapa com as respectivas áreas de cobertura. Encontra-se no Anexo A o mapa da cobertura e alguns dados sobre as células. A zona em estudo, representada na Figura 3.1, cobre os concelhos de Lisboa, Amadora e Oeiras e parte dos concelhos de Loures e Sintra, numa extensão total de 227 km^2.

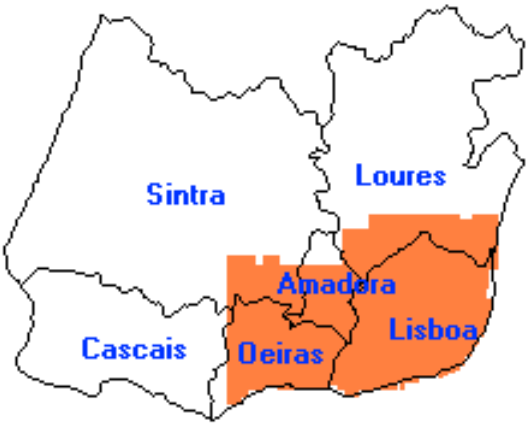


Figura 3.1 – Localização da área de serviço.

O mapa de cobertura das células é definido por uma grelha, com elementos quadrangulares de 250 m de lado, estando a cada elemento associado o número da EB que cobre o local. A cobertura foi determinada a partir de *drive-tests*, sendo escolhida para cada elemento do mapa a EB com sinal mais forte.

Para cada EB, existem dados do tráfego registado em cada hora (entre as 01h e as 23h) referentes às três quintas-feiras com maior tráfego de três meses consecutivos. Foi calculado o tráfego para as 0h como sendo a média do tráfego das 23h e 01h, de modo a ter

intervalos iguais entre todas as amostras. Na análise quer temporal quer espacial considera-se a média de tráfego dos três dias.

O concelho de Lisboa concentra um grande número de zonas de comércio e serviços em detrimento de zonas residenciais que foram deslocadas para os concelhos limítrofes. Como consequência, existem importantes movimentos pendulares destes concelhos para Lisboa: a população residente na cidade é cerca de 660 mil habitantes, [12], passando, no entanto, durante o dia para quase um milhão. Mesmo dentro da cidade, não existe uma distribuição uniforme das zonas de serviços, havendo ainda algumas zonas essencialmente residenciais e com diferentes graus de ocupação do terreno.

Visto que se pretende desenvolver modelos de tráfego distintos consoante o tipo de geografia (centro urbano, residencial, etc.), para cada célula é estudada a densidade de tráfego em [Erl/km^2], sendo a área da célula obtida a partir do número de elementos correspondentes do mapa. Deste modo, é possível fazer uma correspondência directa entre a densidade de tráfego e o tipo de área em análise.

3.2. Funções de Variação Temporal

Observando os gráficos do tráfego suportado, $A(t)$, por cada célula ao longo do dia, Figura 3.2, verifica-se que o tráfego está mais concentrado nas horas do dia a que corresponde maior actividade das pessoas.

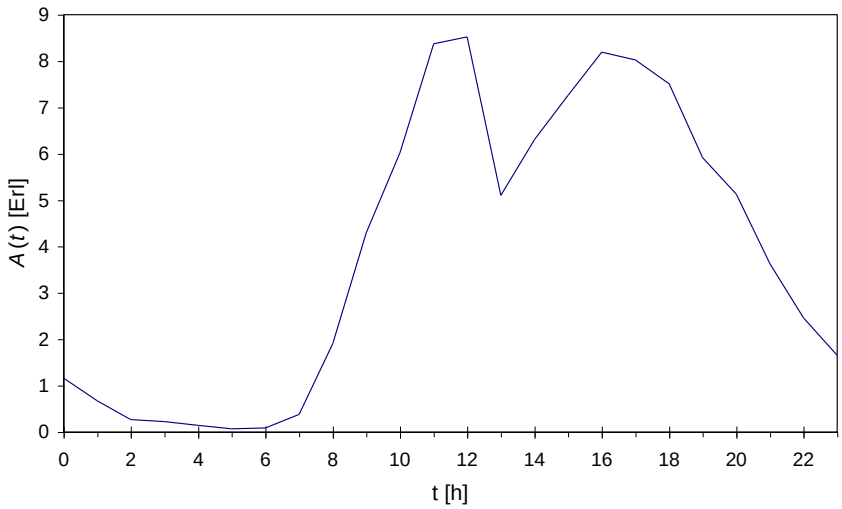


Figura 3.2 – Variação temporal do tráfego para uma das células do sistema.

Na maioria das células, o tráfego aumenta rapidamente de manhã entre as 8h e as 10h, altura em que muitas pessoas iniciam a sua actividade. À hora de almoço (tipicamente 13h) o tráfego apresenta uma pequena queda, voltando a aumentar até cerca das 17h. A diminuição

de tráfego ao fim do dia é mais lenta do que o aumento de manhã, estendendo-se desde as 18h até as 22h, o que se pode relacionar com dois aspectos: por um lado, a saída dos empregos é feita de modo mais gradual e, por outro, este é um período de maior actividade social. O mínimo de tráfego ocorre geralmente cerca das 5h.

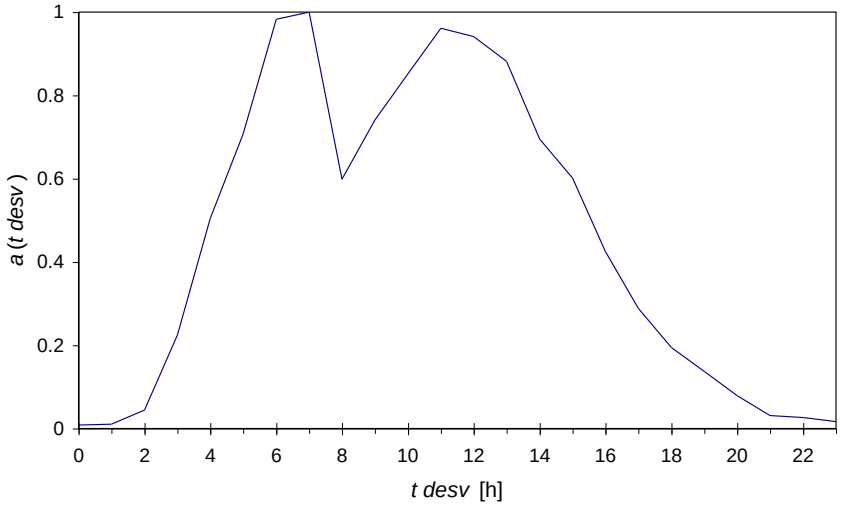


Figura 3.3 - Variação temporal do tráfego desviado e normalizado para uma das células do sistema.

Para obter um modelo de tráfego foi necessário aproximar a variação temporal por funções analíticas relativamente simples. Após a observação do tráfego de todas as células, optou-se por desviar as curvas de tráfego no eixo do tempo de 5 horas, de modo a centrar a curva, o que torna a variação temporal do tráfego mais facilmente modelável por uma função simples. O tráfego foi, ainda, normalizado em relação ao seu valor máximo, de modo a isolar a forma da variação temporal e tornar os parâmetros das aproximações directamente comparáveis. Na Figura 3.3, representa-se a variação temporal de tráfego, $a(t_{desv})$, correspondente à célula representada na Figura 3.2 após o desvio temporal e normalização.

Os valores temporais desviados obtêm-se a partir de:

$$t_{desv}(t) = \begin{cases} t - 5 & 5 \le t < 24 \\ t - 5 + 24 & 0 \le t < 5\,\text{h} \end{cases} \tag{3.1}$$

Assim, as curvas de tráfego começam às 5h (que corresponde no gráfico a t_{desv} = 0h) e prolongam-se até às 4h (t_{desv} = 23h), correspondendo às 0h, t_{desv} = 19h.

Para aproximar as curvas, escolheu-se a função $ap_{gauss}(t)$[9] definida por 2 troços, (3.2), separados pela hora de almoço, h_{alm}, correspondendo a cada troço uma gaussiana, centrada no

[9] No texto, daqui em diante, refere-se esta função como duas gaussianas.

pico da manhã ou da tarde, h_1 e h_2, respectivamente. O valor de tráfego à hora de almoço é o mínimo das duas gaussianas nesse ponto.

$$ap_{gauss}(t_{desv}) = \begin{cases} p_1 \cdot e^{-\frac{(t_{desv}-h_{1desv})^2}{2d_1^2}} & t_{desv} < h_{alm\ desv} \\ \text{mín}\left(p_1 \cdot e^{-\frac{(t_{desv}-h_{1\ desv})^2}{2d_1^2}} ; p_2 \cdot e^{-\frac{(t_{desv}-h_{2\ desv})^2}{2d_2^2}} \right) & t_{desv} = h_{alm\ desv} \\ p_2 \cdot e^{-\frac{(t_{desv}-h_{2\ desv})^2}{2d_2^2}} & t_{desv} > h_{alm\ desv} \end{cases} \tag{3.2}$$

onde:

p_1	é a amplitude da primeira gaussiana;
$h_{1\ desv}$	é a hora de pico da manhã desviada;
d_1	é o desvio da primeira gaussiana;
$h_{alm\ desv}$	é a hora de almoço desviada;
p_2	é a amplitude da segunda gaussiana;
$h_{2\ desv}$	é a hora de pico da tarde desviada;
d_2	é o desvio da segunda gaussiana.

Ao definir-se a função na hora de almoço como o mínimo das duas gaussianas obteve--se uma curva em que h_{alm} representa realmente um mínimo, Figura 3.4.

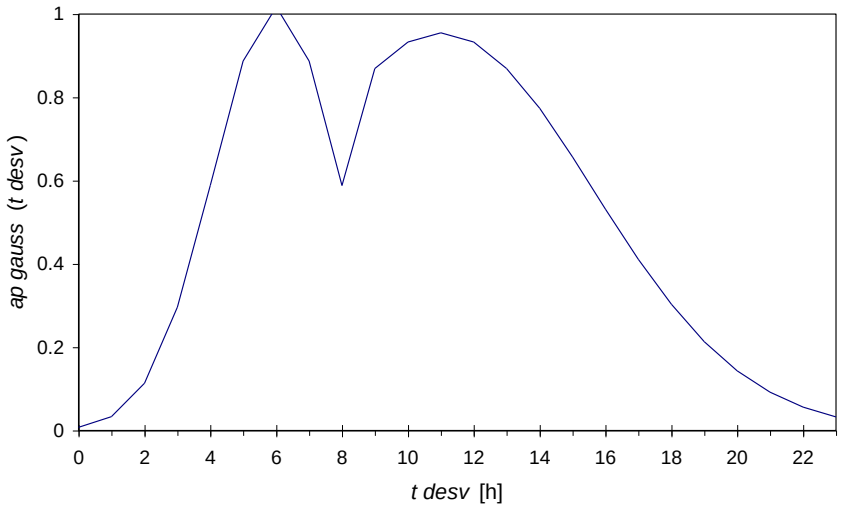


Figura 3.4 – Função duas gaussianas.

Posteriormente verificou-se que um número significativo de curvas apresentava valores de tráfego aproximadamente constantes ao longo de várias horas e, outras ainda, três picos de tráfego em vez de dois, o que tornava a aproximação duas gaussianas nestes casos pouco adequada. Para os casos em que a função $ap_{gauss}(t)$ não se aproxima suficientemente

das curvas foi escolhida uma segunda função de aproximação, $ap_{trap}(t)$. Esta função, semelhante a um trapézio[10], é definida como uma gaussiana, centrada em h e limitada superiormente por uma constante, Figura 3.5:

$$ap_{trap}(t_{desv}) = \begin{cases} p \cdot e^{-\frac{(t_{desv}-h_{tdesv})^2}{2d_t^2}} & t_{desv} < tq_{1desv} \\ c & tq_{1desv} \le t_{desv} \le tq_{2desv} \\ p \cdot e^{-\frac{(t_{desv}-h_{tdesv})^2}{2d_t^2}} & t_{desv} > tq_{2desv} \end{cases} \tag{3.3}$$

com: $c = p \cdot e^{-\frac{(tq_{1desv}-h_{tdesv})^2}{2d_t^2}} = p \cdot e^{-\frac{(tq_{2desv}-h_{tdesv})^2}{2d_t^2}}$

e onde:

p	é a amplitude da gaussiana;
h_{tdesv}	é a hora de pico da gaussiana desviada;
d_t	é o desvio da gaussiana;
tq_{1desv}	é o primeiro ponto de quebra da função desviado;
c	é a constante que limita superiormente a gaussiana;
tq_{2desv}	é o segundo ponto de quebra da função desviado.

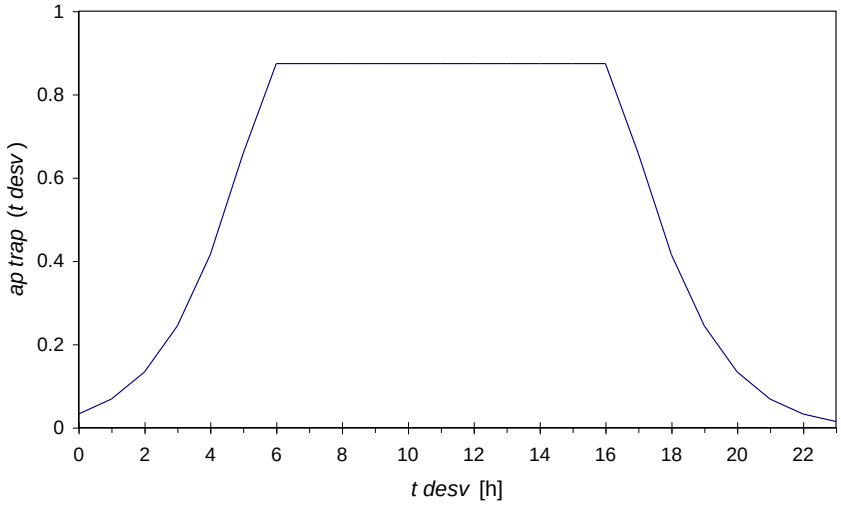


Figura 3.5 – Função trapézio.

Os parâmetros de tempo apresentados neste trabalho são sempre dados em horas reais, pelo que para calcular as funções de tráfego se deve usar os respectivos valores desviados e as expressões acima descritas, (3.2) e (3.3).

[10] Daqui em diante, esta função será referida, por vezes, como função trapézio.

Limitam-se as funções de aproximação a duas, já que a maior parte das curvas é bem aproximada por uma das duas funções definidas e porque um aumento do número de funções não se traduziria em melhorias significativas nos resultados.

3.3. Aproximação aos Dados de Tráfego

3.3.1. Algoritmo

Todas as curvas foram inicialmente aproximadas pela função $ap_{gauss}(t)$ e só de seguida foi testada a segunda função nas células que pudessem ser melhor aproximadas pela função trapézio, sendo escolhida a aproximação com menor erro quadrático médio, *e.q.m.*, [13], (3.4). Para efectuar as aproximações, escolheram-se, observando o gráfico de cada célula, valores iniciais para os vários parâmetros da função escolhida. As horas de pico e de almoço foram estabelecidas no ajuste inicial com definição de 30 minutos e os restantes parâmetros foram optimizados de modo a minimizar *e.q.m.* da aproximação para cada célula:

$$e.q.m. = \sqrt{\frac{1}{24} \cdot \sum_{t=0}^{23} \left[ap(t) - a(t) \right]^2} \tag{3.4}$$

onde:

$ap(t)$ é a função de aproximação, duas gaussianas ou trapézio.

Optou-se por utilizar um erro absoluto, porque com um erro relativo, as horas de menor tráfego teriam uma importância excessiva na optimização dos parâmetros. Assim, o que se obtém são modelos mais próximos das funções reais nas horas mais críticas em termos de capacidade, que é o que se pretende para efeitos de planeamento. Poder-se-ia ter optado por analisar o erro apenas num intervalo central em vez de ser para as 24 horas, mas após alguns testes verificou-se que esta opção conduzia a erros elevados fora do intervalo.

O algoritmo de optimização utilizado baseia-se na divisão de um intervalo inicial em dois intervalos com metade da dimensão do primeiro. O erro quadrático médio é calculado para os valores centrais desses dois intervalos, sendo escolhido o intervalo a que corresponde o menor erro, num processo que se repete N vezes. Como em cada iteração, a dimensão do intervalo é reduzida para metade, o valor final representa um intervalo de dimensão $I \times 2^{-N}$, em que I é a dimensão do intervalo inicial e N é o número de iterações, sendo I dado por:

$$I = 2 \cdot V_i \cdot \frac{P_{[\%]}}{100} \tag{3.5}$$

onde:

V_i é o valor inicial do parâmetro;

P é a variação do intervalo inicial em torno de V_i,

Aproximando o valor inicial pelo valor final, $V_i \approx V_f$, vem que o valor de saída está contido no intervalo:

$$\left[\left(1 - \frac{2^{1-N} \cdot P_{[\%]}}{100}\right) \cdot V_f, \left(1 + \frac{2^{1-N} \cdot P_{[\%]}}{100}\right) \cdot V_f\right] \tag{3.6}$$

Para o intervalo inicial, considerou-se suficiente uma variação de P = 20 % em torno do valor inicial do parâmetro a optimizar e escolheu-se um número de iterações N = 8, obtendo-se um intervalo que varia 0.15 % em torno do valor final. Em todos os casos com mais de uma variável, o algoritmo é recursivo, optimizando simultaneamente todas as variáveis.

No caso da função duas gaussianas, foi aproximada uma gaussiana de cada vez (d_1 e p_1 em simultâneo seguidos de d_2 e p_2, também em simultâneo) visto que as duas são independentes. No caso do trapézio, os três parâmetros, desvio (d_t), amplitude da gaussiana (p), e constante (c), foram optimizados simultaneamente.

3.3.2. Resultados das Aproximações

Na Tabela 3.1 apresentam-se os erros das aproximações às curvas temporais de tráfego. O valor médio de $\overline{e.\,q.\,m.}$ é obtido através de uma média quadrática de M resultados, ou seja:

$$\overline{e.\,q.\,m.} = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} e.\,q.\,m_t^{\,2}} \tag{3.7}$$

Verifica-se que a maior parte das células (78 %) são melhor aproximadas pela função duas gaussianas e que a esta função corresponde um $\overline{e.q.m.}$ menor. Na Figura 3.6 pode observar-se uma curva real de tráfego e a sua aproximação (melhor caso da aproximação duas gaussianas), encontrando-se no Anexo B os melhores e os piores casos relativos às duas

funções. O facto do $\overline{e.q.m.}$ da função trapézio ser maior pode explicar-se porque as células que não se encaixam na função duas gaussianas, têm normalmente curvas mais irregulares.

Tabela 3.1 – Erros das aproximações temporais.

	Duas Gaussianas	Trapézio	Global
Nº Células	156	43	199
Percentagem do Total [%]	78.4	21.6	100
$\overline{e.q.m.}$	0.060	0.071	0.063
e. q. m. max	0.128	0.111	0.128
e. q .m. min	0.021	0.049	0.021

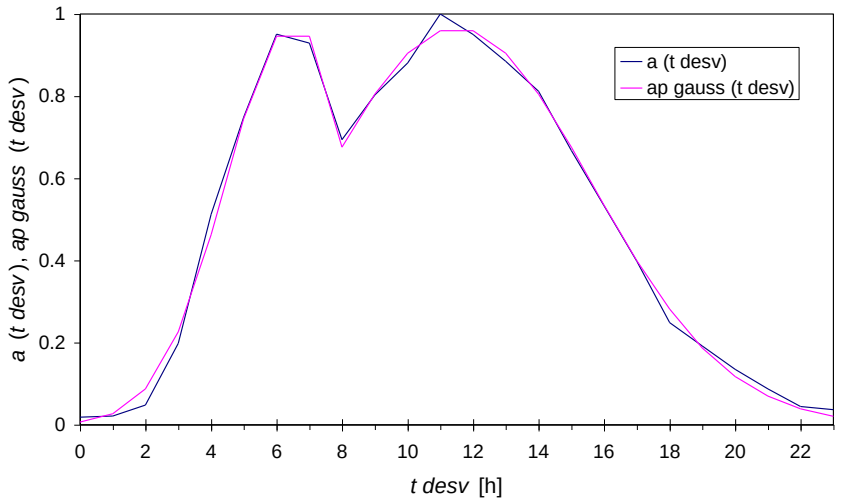


Figura 3.6 – Curva real de tráfego e aproximação duas gaussianas: melhor caso, *e. q. m.* = 0.021.

Os erros que se indicam podem ser comparáveis a erros percentuais, dada a normalização das curvas. No entanto, dada a definição do *e.q.m.*, o erro de 100 % só é atingido em casos em que a aproximação se encontre muito distante da curva de tráfego. Para se ter uma melhor noção da grandeza do *e.q.m.*, aproximaram-se algumas células por uma função identicamente nula, Figura 3.7, registando o *e.q.m.* das aproximações. Obtiveram-se, nestes casos, valores para *e.q.m.* de cerca de 0.6. É assim possível relativizar o *e.q.m.* obtido das aproximações, que é cerca de 10 % do valor obtido para uma aproximação identicamente nula. Note-se que esta análise não altera o resultado das aproximações, servindo apenas como medida dos erros obtidos. Na Tabela 3.2 apresenta-se o $\overline{e.q.m.}$ relativo médio das aproximações, calculado com base nos máximos obtidos para duas células do sistema.

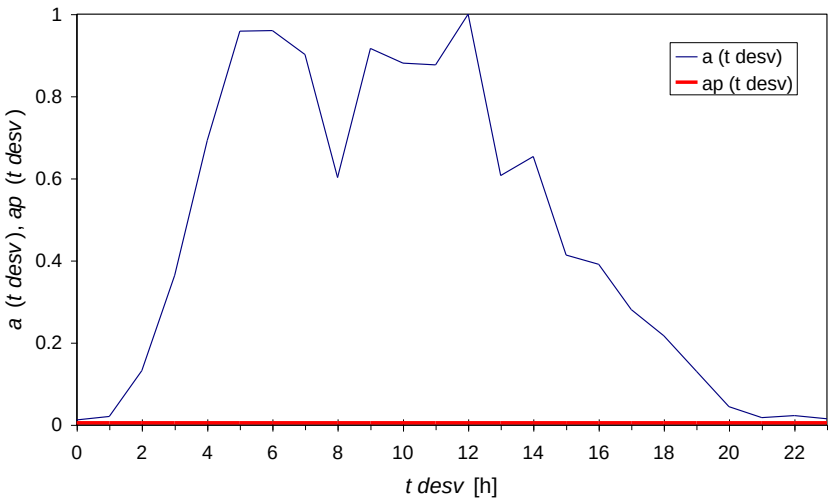


Figura 3.7 – Curva de tráfego aproximada por uma função identicamente nula.

Tabela 3.2 – Erros relativos das aproximações temporais.

	Duas Gaussianas	Trapézio
$\overline{e.q.m.}$	0.060	0.071
$e.\ q.\ m.$ max ($ap(t)$=0)	0.588	0.634
$\overline{e.q.m.}$ relativo [%]	10.2	11.2

Nas Tabelas 3.3 e 3.4 apresentam-se os valores médios, desvios padrão, máximos e mínimos dos parâmetros optimizados relativos a cada função, duas gaussianas e trapézio. As médias foram calculadas considerando-se as células melhor aproximadas por cada função, respectivamente e, no caso de d_1, d_2 e d_t, a média é quadrática, (3.7). Na Figura 3.8 encontram-se as funções de tráfego definidas pelas médias das Tabelas 3.3 e 3.4.

Tabela 3.3 – Valores obtidos para a aproximação trapézio.

Parâmetro	Média	Desvio Padrão	Máximo	Mínimo
h_t [h]	16.0	0.2	16.5	15.5
p	3.05	0.49	4.17	1.92
d_t [h]	3.64	0.13	4.02	3.48
c	0.85	0.05	0.94	0.74

Tabela 3.4 – Valores obtidos para a aproximação de duas gaussianas.

Parâmetro	Média	Desvio Padrão	Máximo	Mínimo
h_1 [h]	11.5	0.5	13.0	10.0
h_{alm} [h]	13.2	0.5	16.0	12.0
h_2 [h]	16.8	0.6	18.5	15.5
p_1	0.92	0.08	1.04	0.53
p_2	0.94	0.07	1.04	0.64
d_1 [h]	2.14	0.27	3.28	1.24
d_2 [h]	4.19	0.51	5.74	2.72

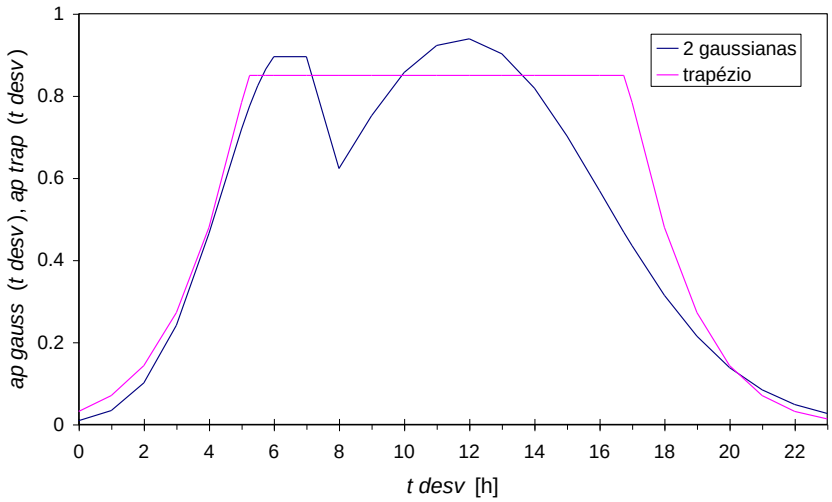


Figura 3.8 – Funções de tráfego definidas a partir dos parâmetros das Tabelas 3.3 e 3.4.

Observando os resultados e a Figura 3.8, verifica-se, no caso da função duas gaussianas, que a segunda gaussiana tem um máximo ligeiramente superior, ou seja, o pico de tráfego ocorre durante a tarde, e ainda que o desvio padrão é cerca do dobro, mostrando que o tráfego está muito espalhado para além da hora de ponta (cerca de 18h). Na função trapézio, existe uma maior contribuição do tráfego de fim do dia, já fora dos horários laborais, ocorrendo os pontos de quebra cerca das 10h e das 22h.

3.4. Modelos de Variação Temporal

3.4.1. Classes de Células

A variação temporal não é, em princípio, independente da geografia da célula correspondente. Assim, e para analisar a ligação entre a distribuição temporal do tráfego e a geografia, foi decidido agrupar as células segundo classes geográficas.

Após observação e classificação das variações temporais apresentadas e geografia das células, foi decidido agrupar as células segundo as seguintes classes geográficas:

- Centro urbano (C)
- Centro urbano com Estradas (CE)
- Residencial (R)
- Residencial com Estradas (RE)
- Suburbana (S)
- Suburbana com Estradas (SE)

O centro urbano corresponde a áreas com um grande número de serviços e onde muitas vezes não existem zonas de habitação relevantes. A zona residencial é predominantemente habitacional, tendo em muitos casos comércio e alguns serviços. As áreas dentro da classe suburbana apresentam o mais baixo grau de ocupação do terreno, sendo que, no caso de algumas células, as únicas construções existentes são estradas. A distinção "com Estradas" aplica-se a células cuja área de cobertura inclua eixos rodoviários importantes. A classificação das células do sistema é apresentada no Anexo A, tendo sido efectuada com base em cartas topográficas do Instituto Geográfico do Exército, cujo levantamento data de 1988. Observe-se que os dados de tráfego são muito mais recentes, podendo existir erros na classificação.

3.4.2. Modelos Normalizados

Estando as células agrupadas por classes, é necessário verificar qual a função que pode servir de modelo para cada classe específica, visto que há duas funções possíveis. Na Tabela 3.5 está indicado o número total de células por classe e ainda quantas são melhor aproximadas pela função duas gaussianas ou pela função trapézio.

A percentagem de células melhor aproximadas pela função trapézio é baixa em quatro das classes e por isso apenas se definem modelos com a função trapézio para as classes

residencial e suburbana. O modelo é obtido a partir da média das funções da classe que são melhor aproximadas pela função de aproximação correspondente (o modelo trapézio para a classe residencial é obtido através das aproximações das 20 células aproximadas por trapézios).

Tabela 3.5 – Número de células por classe e por aproximação.

Classe	C	CE	R	RE	S	SE
Nº Total de Células	41	11	54	28	30	23
Nº Cél. 2 Gaussianas	39	10	34	23	19	20
Nº Cél. Trapézio	2	1	20	5	11	3

Nas Tabelas 3.6 e 3.7 apresentam-se os parâmetros dos modelos normalizados duas gaussianas e trapézio, respectivamente, para cada classe. O valor indicado é a média das aproximações (média quadrática no caso de d_1, d_2 e d_t), encontrando-se no Anexo C, a estatística dos parâmetros, bem como algumas figuras onde se comparam os diferentes modelos.

Tabela 3.6 – Parâmetros dos modelos normalizados de duas gaussianas.

Classe	h_1 [h]	h_{alm} [h]	h_2 [h]	p_1	p_2	d_1 [h]	d_2 [h]
C	11.7	13.1	16.7	0.91	0.94	2.11	4.32
CE	11.6	13.0	16.4	0.92	0.96	2.17	4.04
R	11.5	13.3	16.9	0.93	0.96	2.18	4.34
RE	11.3	13.0	17.0	0.91	0.96	2.13	4.16
S	11.3	13.3	16.9	0.90	0.88	2.16	4.07
SE	11.1	13.2	17.1	0.93	0.94	2.08	3.94

Tabela 3.7 – Parâmetros dos modelos normalizados trapézio.

Classe	h_t [h]	p	d_t [h]	c	tq_1 [h]	tq_2 [h]
R	16.1	2.91	3.64	0.85	10.4	21.7
S	16.0	3.06	3.70	0.85	10.2	21.9

Observando os resultados, verifica-se que os modelos normalizados têm parâmetros bastante semelhantes entre si, bem como com as médias apresentadas nas Tabelas 3.3 e 3.4, sendo possível, a partir dos modelos de duas gaussianas, verificar algumas tendências:

- O deslocamento do centro para a periferia (classes centro urbano → residencial → suburbana) traduz-se num afastamento dos picos de tráfego, particularmente notório em células com estradas, Figura 3.9;
- A existência de estradas tem o efeito de afastar mais os picos de tráfego. Este efeito verifica-se, principalmente, nas classes residencial e suburbana, Figuras C.4 e C.5 do Anexo C, respectivamente;
- Nas classes com estradas, os modelos são sempre de duas gaussianas, acompanhando, de certo modo, a variação temporal do tráfego rodoviário (movimentos pendulares).

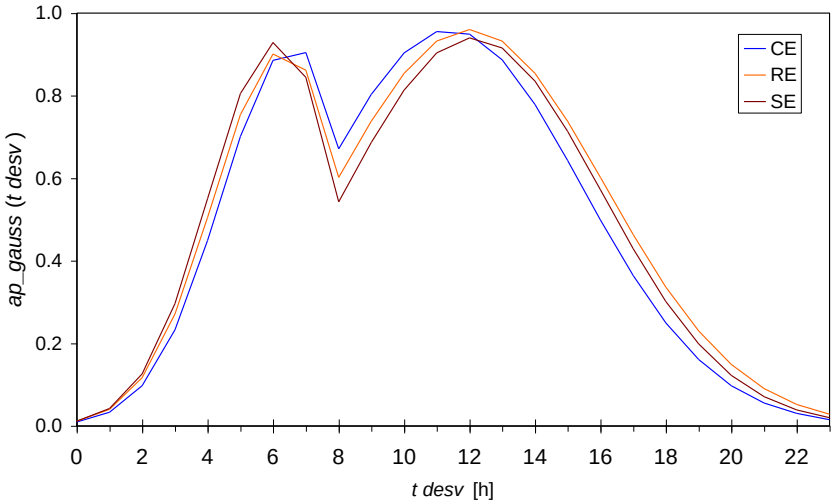


Figura 3.9 – Comparação dos modelos temporais normalizados para as classes CE, RE e SE.

Os modelos foram, em seguida, comparados com as curvas de tráfego reais, estando indicado na Tabela 3.8 o $\overline{e.q.m.}$ do modelo para cada classe. No cálculo dos erros foram estudadas todas as células da classe, incluindo as que eram melhor aproximadas por uma função diferente.

Tabela 3.8 – Erros dos modelos normalizados.

	C	CE	R		RE	S		SE
			2 G	T		2 G	T	
$\overline{e.q.m.}$	0.086	0.083	0.101	0.110	0.099	0.133	0.151	0.115

Os erros obtidos têm valores próximos de 0.1, o que, em termos relativos, corresponde a cerca de 15 %, sendo as classes mais críticas do sistema, C e CE, as que apresentam modelos melhor adaptados. Verifica-se, portanto, que os modelos desenvolvidos se aproximam bastante bem da variação temporal do tráfego.

Uma outra medida da semelhança entre os modelos e os dados, é a relação entre tráfego médio e máximo de uma célula. São apresentados, na Tabela 3.9, os resultados obtidos para cada modelo e ainda o valor médio por classe das curvas reais.

Tabela 3.9 – Percentagem de tráfego médio em relação ao máximo da curva para os modelos e para os dados reais de tráfego.

	$\overline{dA}/dA_{máx}$ [%]					
	C	CE	R	RE	S	SE
Modelo Duas Gaussianas	51.2	49.6	52.9	52.2	51.9	51.9
Modelo Trapézio	-	-	61.9	-	64.6	-
Dados Reais	47.7	47.3	50.7	50.4	48.7	48.7

Observa-se que os valores são todos próximos de 50 %, sendo as percentagens dos modelos ligeiramente superiores às das curvas de tráfego. No caso dos modelos com funções trapézio, a percentagem é superior, no entanto, isto não representa um desajuste em relação às curvas reais: o máximo, cerca de 0.85, está abaixo dos picos de tráfego dos outros modelos, pelo que é mais correcto comparar com os restantes valores da tabela, os valores 61.9 % × 0.85 = 52.6 % e 64.6 % × 0.85 = 55.1 %.

3.4.3. Modelos de Densidade de Tráfego

Os resultados apresentados na última secção dão apenas conta da forma da variação temporal de tráfego. No entanto, conhecer a amplitude do tráfego é essencial em termos de planeamento celular, já que é necessário estimar a quantidade de tráfego para as horas críticas do sistema. Usando, para cada célula, os valores de densidade de tráfego em vez dos dados de tráfego normalizados, obtêm-se os modelos cujos parâmetros estão nas Tabelas 3.10 e 3.11. Note-se que a diferença entre estes resultados e os das Tabela 3.6 e 3.7 se encontra apenas nas amplitudes das gaussianas, p_1, p_2 e p, e no valor da constante c da função trapézio. Na

determinação dos modelos não normalizados foram excluídas as células cuja área de cobertura indicada no mapa corresponde a apenas um elemento, já que o valor de densidade de tráfego nesta situação está muito sujeito a erros. Foram ainda excluídas duas células que eram repetidas no mapa de cobertura.

Tabela 3.10 – Parâmetros dos modelos de densidade de tráfego duas gaussianas.

Classe	h_1 [h]	h_{alm} [h]	h_2 [h]	p_1 [Erl/km^2]	p_2 [Erl/km^2]	d_1 [h]	d_2 [h]
C	11.7	13.1	16.7	25.13	26.35	2.11	4.32
CE	11.6	13.0	16.4	30.93	32.63	2.17	4.04
R	11.5	13.3	16.9	10.24	10.52	2.18	4.34
RE	11.3	13.0	17.0	7.67	8.16	2.13	4.16
S	11.3	13.3	16.9	2.29	2.26	2.16	4.07
SE	11.1	13.2	17.1	2.78	2.80	2.08	3.94

Numa primeira análise, verifica-se que existem grandes diferenças de amplitude de tráfego entre as várias classes, ao contrário do que se observou para os outros parâmetros. Conclui-se, assim, que é sobretudo a densidade de tráfego e não a forma que distingue as classes definidas. Naturalmente, são as classes do centro urbano que apresentam maiores amplitudes de tráfego (25, 30 Erl/km^2), notando-se ainda dentro do centro urbano diferenças caso existam ou não estradas. Existindo estradas, a densidade de tráfego é superior, o que levanta a hipótese de facilmente se poder estimar o tráfego de células com estradas, simplesmente adicionando ao valor estimado para o centro, a parte correspondente ao tráfego de estrada. Um valor possível é a diferença de amplitudes das classes do centro, cerca de 6 Erl/km^2.

Tabela 3.11 – Parâmetros dos modelos de densidade de tráfego trapézio.

Classe	h_t [h]	p	d_t [h]	c	tq_1 [h]	tq_2 [h]
R	16.1	30.66	3.64	8.93	10.4	21.7
S	16.0	9.63	3.70	2.76	10.2	21.9

A amplitude de tráfego de zonas residenciais com eixos rodoviários é inferior à das zonas exclusivamente residenciais, 7 e 10 Erl/km^2, respectivamente. No caso das classes suburbanas, a densidade de tráfego é bastante inferior, cerca de 3 Erl/km^2, e existindo estradas, o tráfego aumenta, ao contrário do que se verifica na classe residencial.

É ainda importante efectuar uma análise da dispersão dos parâmetros em torno da média. Na Tabela 3.12 apresenta-se a estatística dos parâmetros do modelo para a classe C, encontrando-se os resultados relativos às restantes classes no Anexo D. Como se pode verificar, o desvio em relação à média é grande para as amplitudes de tráfego, ou seja, dentro da classe do centro urbano, existem células com densidades de tráfego muito diferentes: note--se que o máximo é cerca de dez vezes superior ao menor valor.

Tabela 3.12 – Estatística dos parâmetros do modelo para a classe C.

	h_1 [h]	h_{alm} [h]	h_2 [h]	p_1 [Erl/km^2]	p_2 [Erl/km^2]	d_1 [h]	d_2 [h]
Média	11.7	13.1	16.7	25.13	26.35	2.11	4.32
D. Padrão	0.3	0.4	0.6	12.71	13.65	0.20	0.58
Máximo	12.0	14.0	17.5	61.50	66.40	2.53	5.74
Mínimo	11.0	12.0	15.5	8.52	6.73	1.51	2.86

Em seguida, foi testado o grau de aproximação dos modelos aos dados de tráfego. Uma vez que o tráfego já não é normalizado, e para possibilitar uma comparação directa entre diferentes casos, usa-se o erro quadrático relativo, sendo definido o desvio do modelo, *mod*(*t*), em relação ao máximo da densidade de tráfego da curva real, *dA*(*t*):

$$e(t) = \frac{mod(t) - dA(t)}{\max\{dA(t)\}} \tag{3.8}$$

Assim, o erro do modelo relativo a cada célula, *e. q. r.*, define-se como:

$$e.q.r. = \sqrt{\frac{1}{24}\sum_{t=0}^{23} e^2(t)} \tag{3.9}$$

As médias quadráticas dos erros obtidos pelas aproximações por classes estão indicadas na Tabela 3.13. Os erros têm valores significativos, consideravelmente superiores aos dos modelos normalizados, devendo-se a diferença à grande dispersão de amplitudes da densidade de tráfego verificada dentro de cada classe. A tendência verificada nos primeiros

modelos repete-se novamente aqui: melhores aproximações para o centro urbano e piores resultados no caso da classe suburbana. Note-se que os erros elevados em zonas suburbanas se devem, sobretudo, à existência de células com valores de tráfego muito baixos, que elevam bastante o valor de $\overline{e.q.r.}$.

Tabela 3.13 – Erros relativos dos modelos de densidade de tráfego.

	C	CE	R		RE	S		SE
			2 G	T		2 G	T	
$\overline{e.q.r.}$ [%]	43.4	67.0	52.9	51.7	73.7	92.6	148.7	91.3

Face a estes resultados, indicar apenas o valor médio do pico de densidade de tráfego para um modelo é muito limitativo em termos de utilização do mesmo. Determinando as distribuições estatísticas das amplitudes das curvas reais de tráfego por classe, é possível obter-se modelos cuja amplitude é igual ou superior a, por exemplo, 75 % das curvas reais estudadas. Para cada modelo foi obtida a distribuição de p_2, caso a função seja uma gaussiana, ou de c, caso seja um trapézio. O valor correspondente de p_1 ou p, estima-se facilmente por proporcionalidade. Na Figura 3.10, apresenta-se a distribuição de p_2 do modelo para a classe C, encontrando-se as restantes distribuições no Anexo D.

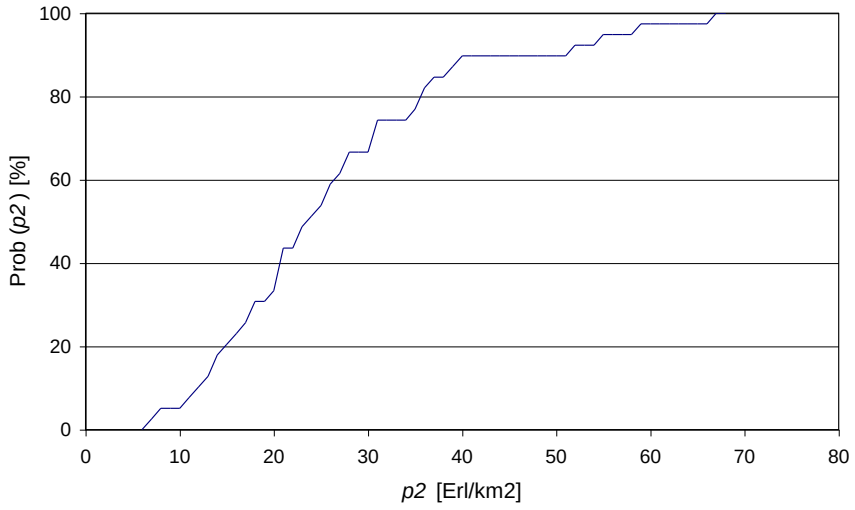


Figura 3.10 – Distribuição do parâmetro p_2 do modelo para a classe C.

Pode observar-se a grande dispersão de amplitudes em torno da média, responsável pelos elevados erros apresentados. Com efeito, esta é a grande limitação dos modelos de densidade de tráfego: a diversidade de ambientes possíveis dentro de uma mesma classe

geográfica provoca grandes disparidades nos valores de densidade de tráfego, o que torna muito difícil encontrar um modelo simples para a descrição da densidade de tráfego.

Dados os modelos obtidos de variação temporal para as classes residencial e suburbana, seria interessante analisar uma possível combinação linear dos dois modelos apresentados, duas gaussianas e trapézio. Neste trabalho não é feita esta análise pois pretendem-se modelos o mais simples possível, ainda que o erro apresentado possa ser ligeiramente superior.

Saliente-se ainda, que os resultados obtidos para os modelos estão, de certo modo, limitados pela definição dos dados disponíveis, não só na definição do mapa de cobertura, como também no intervalo de amostragem do tráfego de cada célula.

4. Distribuição Espacial

4.1. Mapa da Densidade de Tráfego

Para estudar a variação espacial do tráfego na área em estudo foi necessário obter um mapa com valores da densidade de tráfego em cada elemento de área. Como os dados disponíveis se referem ao tráfego registado em cada célula, dividiu-se o tráfego total pela sua área (estimada pela soma das áreas dos elementos que a constituem), obtendo a densidade de tráfego média na célula. Foi considerado que, dentro de cada célula, a densidade de tráfego é uniforme, sendo o resultado um mapa com a densidade média de tráfego à escala da área de cada célula. Este procedimento foi efectuado para uma hora específica, sendo este mapa, naturalmente, variável no tempo.

O modo como o mapa de cobertura foi obtido faz com que possam existir erros significativos nos valores da densidade de tráfego, principalmente para células relativamente pequenas, em que o erro relativo entre a área de cobertura efectiva da EB e a estimada a partir do número de elementos seja elevado: veja-se que a não consideração de um elemento numa célula originalmente com dois elementos faz com que a densidade de tráfego obtida seja o dobro da real. Por este motivo, os dados relativos a células com um número reduzido de elementos foram examinados em busca de valores muito díspares numa mesma área. Foi decidido limitar o valor máximo da densidade de tráfego ao valor do segundo máximo visto que o primeiro é de uma célula a que corresponde apenas um elemento no mapa e apresenta um valor muito elevado de densidade de tráfego, 243.9 Erl/m^2, cerca do triplo do segundo máximo e dez vezes mais que os elementos circundantes.

Adicionalmente, antes de se proceder à análise do tráfego, efectuou-se ainda uma média espacial da densidade de tráfego com vista a eliminar variações bruscas. Esta média foi efectuada pelo método da janela deslizante (a duas dimensões), sendo o valor de densidade de tráfego de cada elemento passa a média dos valores dos nove elementos contidos num

quadrado centrado no primeiro. Deste modo diminui-se o erro provocado pela definição do mapa.

4.2. Perfis de Tráfego

Para analisar a variação espacial da densidade de tráfego, tomou-se como abordagem analisar a variação da densidade de tráfego em relação à distância *d* do centro. O ponto que foi considerado como centro corresponde ao elemento com o máximo de tráfego às 17h, situando-se na zona do Marquês de Pombal. Foi escolhida esta hora por corresponder a uma das horas de ponta no sistema, como se verificou no capítulo anterior. Verificou-se ainda que, para outras horas durante o dia, o pico de tráfego se mantinha no mesmo elemento, embora com valores distintos do da hora de ponta.

A partir do centro foram traçados perfis em diferentes direcções com intervalos de 10º que, devido à grande assimetria geográfica de Lisboa, foram agrupados em três sectores com geografia semelhante, Figura 4.1. Os perfis são obtidos amostrando o mapa da densidade de tráfego, segundo uma dada direcção a partir do centro e com intervalos de 250 m. O aumento de resolução do perfil conseguido ao diminuir o intervalo entre amostras para além deste valor não é significativo visto que é esta a definição do mapa.

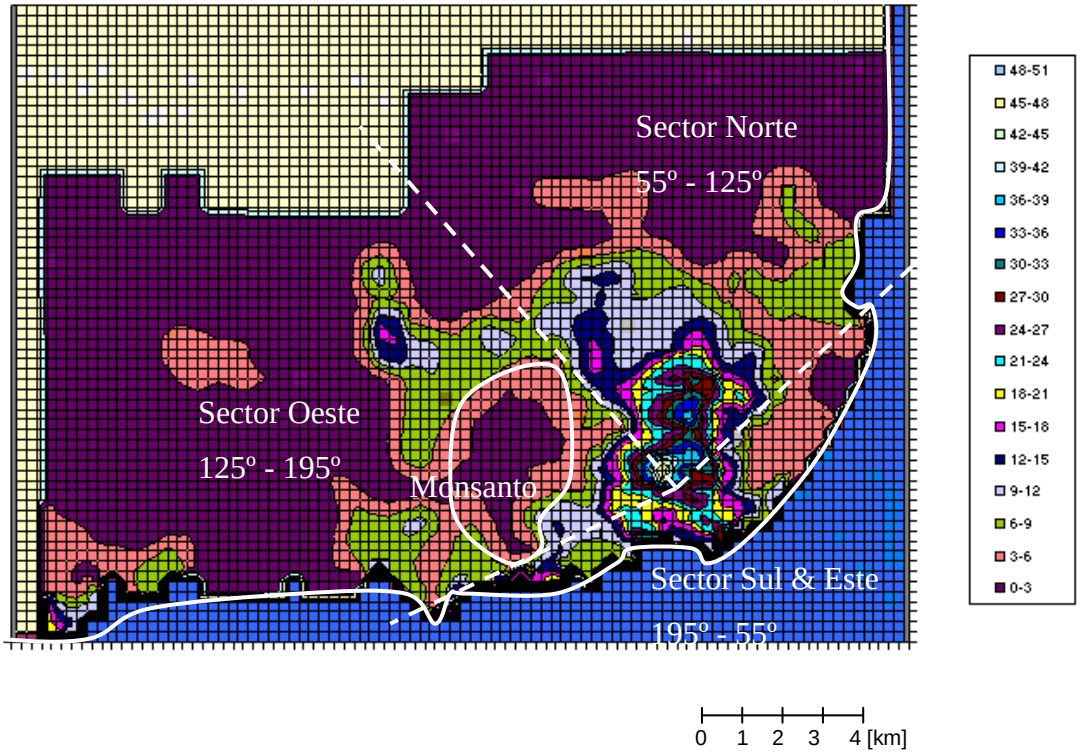


Figura 4.1 – Densidade de tráfego no sistema às 17h [Erl/km^2] e separação por sectores.

O sector Norte é marcado pela maior expansão da área urbana segundo a direcção Norte. Como se pode observar na Figura 4.1, é neste sector que se concentra a maior parte da área de centro urbano, o que provoca um decaimento mais lento da densidade de tráfego com a distância. O sector Oeste é dominado pela área florestal de Monsanto que é responsável pela limitação ao crescimento de Lisboa segundo a direcção Oeste; neste sector, observa-se um segundo pico da densidade de tráfego após a passagem por Monsanto, em parte devido à passagem pela zona da Amadora, importante cidade limítrofe. Finalmente, o sector Sul & Este é marcado pela fronteira com o rio Tejo o que, em alguns casos, se traduz numa queda abrupta da densidade de tráfego: parte da zona ribeirinha faz parte do centro de cidade.

Normalizaram-se os perfis ao seu valor no centro de modo a que a densidade de tráfego, $da(d)$, para $d = 0$, fosse a unidade. Para as 17h, o valor da densidade de tráfego no centro é de 48.4 Erl/km^2, sendo este o valor de referência para a análise seguinte.

Em cada sector foram obtidos os perfis médios através de (4.1), ou seja, fazendo a média de todos os perfis que constituem o sector; note-se que a expressão (4.1) só é válida enquanto todos os perfis forem válidos, isto é, enquanto não saiam dos limites da área de serviço (neste último caso, a média é feita apenas com os perfis válidos para a distância em questão).

$$da(d) = \frac{1}{n\_perfis} \cdot \sum_{n=n\_ini}^{n\_fin} da_{perfil\_n}(d) \qquad (4.1)$$

onde:

$da(d)$	é a densidade de tráfego média normalizada à distância d do centro;
n_perfis	é o número de perfis no sector em questão;
n_ini	é o índice do primeiro perfil do sector;
n_fin	é o índice do último perfil do sector;
$da_{perfil\_n}(d)$	é a densidade de tráfego normalizada segundo o perfil n à distância d.

Na Figura 4.2 apresentam-se os diferentes perfis e a média para o sector Norte às 17h, encontrando-se, no Anexo E, os perfis e respectivas médias para os três sectores. Observa-se que existem perfis para um mesmo sector com diferenças de amplitude consideráveis; na realidade, diferenças como estas estão inerentes à própria distribuição espacial de tráfego. Na Figura 4.3, apresentam-se as médias para os três sectores. Pode observar-se que a densidade de tráfego decai de modo diferente para cada sector, para distâncias entre 1 km e 5 km, embora tenda para o mesmo valor.

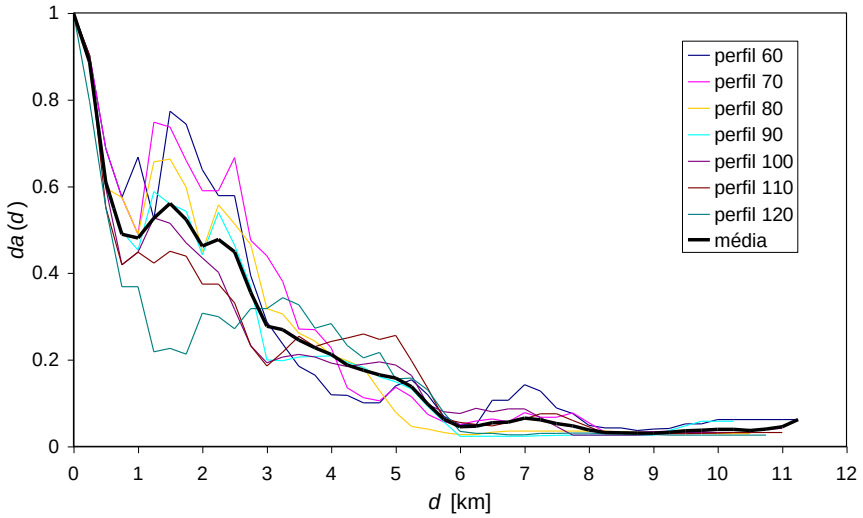


Figura 4.2 – Perfis de tráfego para o sector Norte e respectiva média.

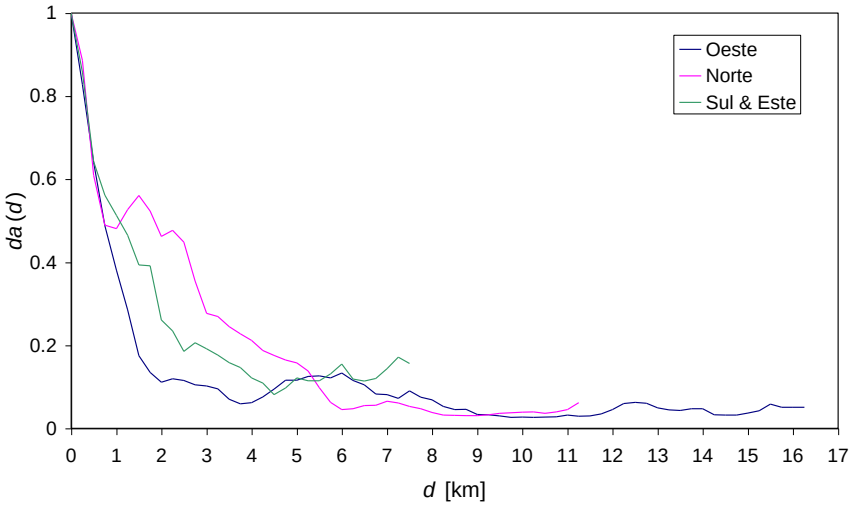


Figura 4.3 – Médias dos perfis de tráfego para os três sectores.

Para medir a proximidade entre os diversos perfis que constituem um sector utilizou-se o desvio padrão, obtido para cada ponto dos perfis de cada sector. O desvio padrão médio para o sector é calculado como sendo a média quadrática dos desvios padrão para cada ponto d_n, (4.2):

$$d.p._{sector} = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} d.p.^2(d_n)} \tag{4.2}$$

onde:

N	é o número de pontos do maior perfil do sector;
d_n	é a distância ao centro (dada por $n \times 250$ m);
$d.p.(d_n)$	é o desvio padrão entre os diferentes perfis do sector à distância d_n.

Como os perfis se encontram normalizados, o desvio padrão apresentado é igualmente normalizado, sendo directamente comparável para diferentes horas. Para as 17h, foram obtidos os valores apresentados na Tabela 4.1:

Tabela 4.1 – Desvio padrão dos perfis de cada sector às 17h.

Sector	Norte	Oeste	Sul & Este	Global
$d.p._{sector}$	0.064	0.041	0.080	0.071

Como se pode verificar, o desvio padrão é menor que o global em dois dos sectores, Norte e Oeste, dada a maior uniformidade dos seus perfis. No sector Sul & Este nota-se a tendência inversa, o que se deve a diferenças significativas do tipo de ocupação da sua área, desde zonas de serviços a zonas residenciais ou zonas portuárias dominadas por armazéns.

4.3. Variação Espacial

4.3.1. Aproximações

Para modelar a variação da densidade de tráfego com a distância, Figura 4.2, foram escolhidas diversas funções. Como já foi referido no Capítulo 2, a função exponencial, (4.3), é normalmente usada para modelar a variação espacial do tráfego, pelo que é uma das escolhas. Observando os perfis obtidos, foram escolhidos outros modelos que pudessem melhor aproximar a variação espacial. Segundo esta lógica, foram escolhidas as funções exponencial / linear, (4.4) e linear por troços, (4.5). A função exponencial / linear difere da exponencial simples por ser constante a partir de uma certa distância, enquanto que a função linear por troços tem três troços, sendo o último constante. Estas funções apresentam a vantagem de, para distâncias grandes, não convergirem para zero, o que as torna mais próximas da variação real. Experimentou-se, ainda, o modelo linear, (4.6), obtido por simples regressão linear dos pontos do perfil. Assim, os modelos testados são os seguintes:

$$mod_e(d) = e^{-d/De} \tag{4.3}$$

$$mod_{el}(d) = \begin{cases} e^{-d/Del} & d \le dq \\ Cel = e^{-dq/Del} & d > dq \end{cases} \tag{4.4}$$

$$mod_{lt}(d) = \begin{cases} 1 - Alt \cdot d & d \le dq_1 \\ Blt - Clt \cdot d & dq_1 < d \le dq_2 \\ Dlt & d > dq_2 \end{cases} \tag{4.5}$$

$$mod_l(d) = Al + Bl \cdot d \tag{4.6}$$

onde:

De	é o factor de decaimento da função exponencial simples;
Del	é o factor de decaimento da função exponencial / linear;
dq	é o ponto de quebra da função exponencial / linear;
Cel	é a constante da função exponencial / linear;
Alt	é o declive do primeiro troço da função linear por troços;
dq_1	é o primeiro ponto de quebra da função linear por troços;
Blt	é a constante do segundo troço da função linear por troços;
Clt	é o declive do segundo troço da função linear por troços;
dq_2	é o segundo ponto de quebra da função linear por troços;
Dlt	é a constante da função linear por troços;
Al	é a constante da função linear;
Bl	é o declive do modelo linear.

Note-se que as funções (4.4) e (4.5) são definidas por troços, tendo-se garantido a continuidade das funções nos pontos de quebra.

Para obter os parâmetros dos modelos, recorreu-se ao algoritmo descrito no Capítulo 3, tendo a média de cada sector sido aproximada por cada uma das funções, com base na minimização do erro quadrático médio, *e.q.m.*:

$$e.q.m. = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left[da(d_n) - mod(d_n) \right]^2} \tag{4.7}$$

onde:

N	é o número de pontos do sector;
d_n	é a distância ao centro (dada por $n \times 250$ m);
$da(d_n)$	é a densidade de tráfego média normalizada do sector à distância d_n;
$mod(d_n)$	é o modelo do sector à distância d_n, dada pelas expressões (4.3) - (4.6).

Note-se que, tanto a aproximação como o *e.q.m.*, se encontram normalizados ao valor da densidade de tráfego no centro. A aproximação foi feita simultaneamente para todas as variáveis de uma mesma função a partir de uma aproximação inicial grosseira. O intervalo de variação dos parâmetros foi de ±20 % em torno do valor inicial, tendo sido feitas oito iterações por variável, o que garante valores finais com incertezas inferiores a 0.15 %. Na secção seguinte apresentam-se os modelos resultantes das aproximações, bem como os respectivos erros.

4.3.2. Modelos

Os resultados das aproximações obtidos para as 17h são apresentados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Parâmetros dos modelos de variação espacial para as 17h.

Aproximação	Parâmetro	Sector		
		Norte	Oeste	Sul & Este
Exponencial	*De* [km]	2.401	1.220	1.768
	e.q.m.	0.061	0.060	0.072
Exp / Linear	*Del* [km]	2.383	1.220	1.572
	Cel	0.038	0.060	0.131
	dq [km]	7.800	3.429	3.201
	e.q.m.	0.060	0.038	0.031
Lin p/ Troços	*Alt* [km^{-1}]	-0.727	-0.615	-0.682
	Blt	0.638	0.147	0.706
	Clt [km^{-1}]	-0.101	-0.011	-0.203
	Dlt	0.043	0.041	0.133
	dq_1 [km]	0.577	1.411	0.614
	dq_2 [km]	5.910	9.933	2.827
	e.q.m.	0.031	0.022	0.027
Linear	*Al* [km^{-1}]	-0.061	-0.021	-0.079
	Bl	0.563	0.289	0.563
	e.q.m.	0.121	0.142	0.143

Os perfis médios bem como as aproximações para as 17h e para os sectores Norte, Oeste e Sul & Este encontram-se representados nas Figuras 4.4, 4.5 e 4.6, respectivamente.

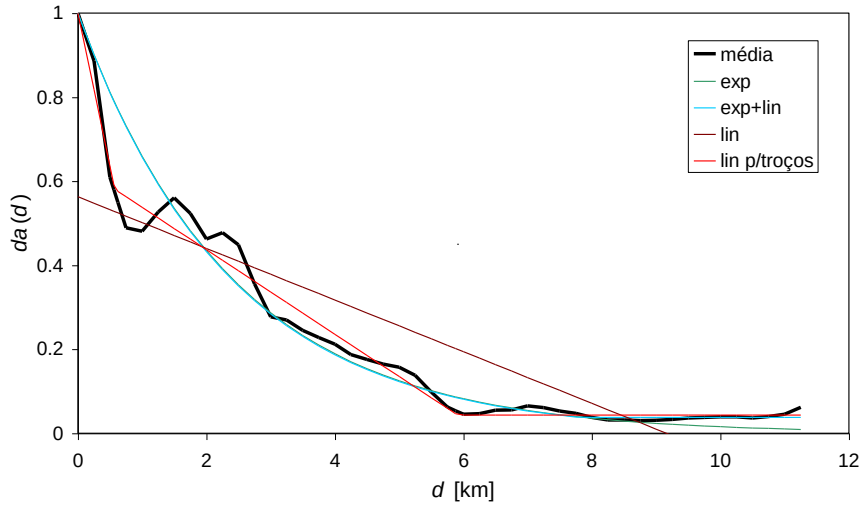


Figura 4.4 – Aproximações à variação espacial da densidade de tráfego no sector Norte.

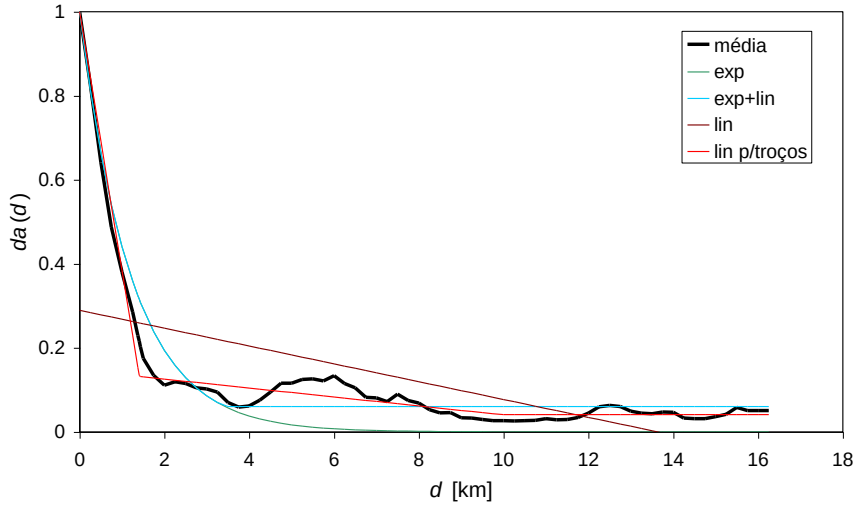


Figura 4.5 – Aproximações à variação espacial da densidade de tráfego no sector Oeste.

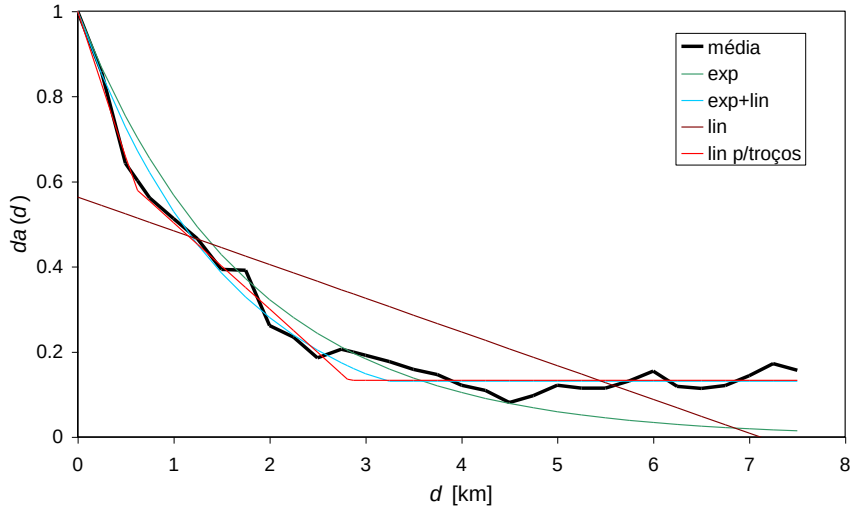


Figura 4.6 – Aproximações à variação espacial da densidade de tráfego no sector Sul & Este.

Como se pode observar, as aproximações exponencial simples e linear apresentam sempre erros superiores às restantes, o que já era de esperar dada a sua maior simplicidade. A expressão linear é, de longe, a que tem piores resultados, estando muito longe do desejado. A função exponencial é adequada para a descrição da variação espacial do tráfego numa distância limitada, sendo o seu desempenho bastante pior que o da exponencial / linear para distâncias superiores (como é o caso do sector Oeste). Como estas funções são casos particulares das restantes, foram abandonadas, passando a análise a ser efectuada apenas para as funções exponencial / linear e linear por troços.

As diferenças dos parâmetros de um modelo para diferentes sectores, são particularmente notáveis para o modelo linear por troços. O primeiro troço do modelo é muito semelhante para os três sectores, no entanto, existem grandes diferenças no segundo troço, com declives entre –0.011 km^{-1} e –0.203 km^{-1}. Isto vai de encontro ao facto, já referido anteriormente, de que a principal diferença entre os três sectores é o modo como a densidade de tráfego decai. O modelo para o sector Sul & Este apresenta um valor constante na periferia, *Dlt*, bastante superior aos dos restantes sectores. Este facto deve-se à limitação geográfica da cidade pelo rio, o que provoca que a zona periférica para este sector se situe, ainda, numa zona urbana.

Para analisar o desvio das aproximações em relação à densidade de tráfego real, foi definido o erro de aproximação, $e(d)$, para um dado ponto pertencente ao perfil n e uma dada aproximação, por:

$$e(d) = da_{perfil\_n}(d) - mod(d) \tag{4.8}$$

onde:

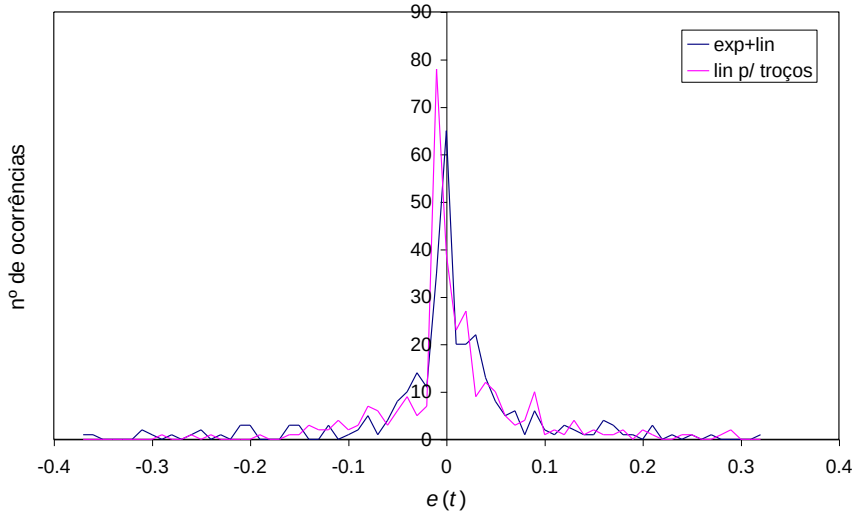
$da_{perfil\_n}(d)$ é a densidade de tráfego normalizada no ponto em análise;

$mod(d)$ é o modelo para o sector respectivo à distância d.

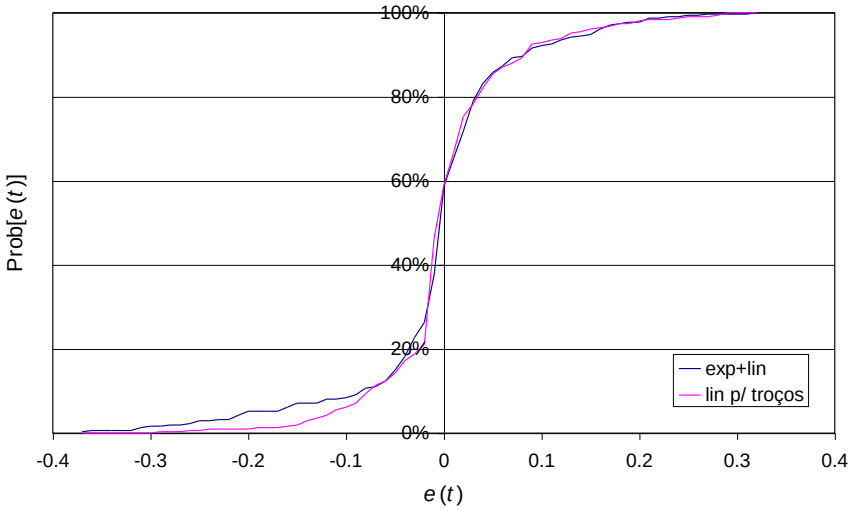
Note-se que, como o erro de aproximação resulta da diferença de grandezas normalizadas, este é também normalizado.

Analisa-se em seguida a distribuição estatística dos erros de aproximação relativos a todos os pontos de um dado sector, de modo a medir o desvio em relação aos modelos. Apresentam-se na Figura 4.7 as funções densidade de probabilidade e distribuição do erro de aproximação para o sector Norte, para as aproximações exponencial / linear e linear por troços relativas às 17h, encontrando-se no Anexo F os resultados para todos os sectores.

Pode observar-se que, para a grande maioria dos pontos analisados, o erro de aproximação é bastante pequeno: em módulo, é inferior a 0.04 para os sectores Norte e Oeste e 0.08 para o sector Sul & Este, em 60 % dos pontos. A estatística do erro de aproximação é semelhante para os três sectores, embora com espalhamentos diferentes. Pode-se observar que o espalhamento do erro para cada sector segue a mesma tendência que o desvio padrão dos perfis, apresentado na Tabela 4.1, sendo bastante superior no sector Sul & Este.



(a) Função densidade de probabilidade.



(b) Distribuição do erro.

Figura 4.7 – Erro de aproximação para o perfil Norte.

É possível estimar superiormente e de forma mais ou menos exigente a densidade de tráfego num dado ponto, obtendo a densidade de tráfego média pelo modelo e adicionando o valor correspondente à probabilidade pretendida, retirado do gráfico do sector em causa (Anexo F).

4.4. Variação Temporal da Distribuição de Tráfego

Como já foi referido, a distribuição espacial não é estática. A densidade de tráfego, *dA*, varia ao longo do dia de modo diferente para células distintas, alterando-se em relação à situação analisada para as 17h, não só através de um factor multiplicativo (densidade de tráfego no centro) mas também na sua distribuição relativa. Estas últimas alterações estão directamente relacionadas com a mobilidade dos utilizadores reflectindo as suas diferentes localizações durante o dia.

Analisando a variação ao longo do dia da densidade de tráfego no centro, Tabela 4.3, verifica-se que a densidade de tráfego segue uma variação temporal idêntica à verificada no Capítulo 3 para a maioria das células, com picos às 11h e às 17h, Figura 4.8.

Tabela 4.3 – Valores da densidade de tráfego no centro para diferentes horas.

t [h]	*dA* [Erl/km2]
0	7.7
7	2.9
9	23.9
11	40.1
13	31.5
15	44.0
17	48.4
19	38.6
21	22.0
22	17.0
23	11.3

Para uma melhor visualização da variação temporal da densidade de tráfego com o tempo, apresenta-se, na Figura 4.9, a evolução da média dos perfis da densidade de tráfego para o sector Sul & Este entre as 17h e as 23h. Como se pode verificar, é a amplitude o parâmetro que mais varia no tempo. Este facto vem reforçar a ideia que a densidade de tráfego apresenta uma variação semelhante para diferentes classes geográficas de células, facto já observado no Capítulo 3.

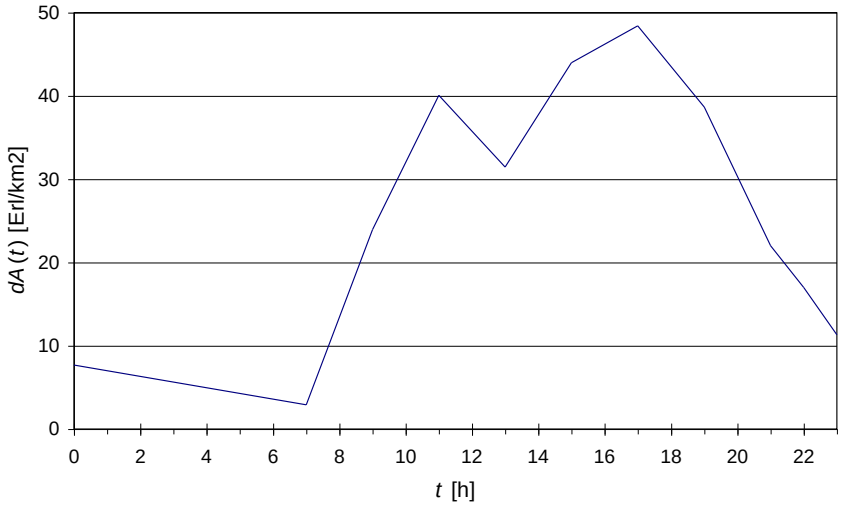


Figura 4.8 – Variação temporal da densidade de tráfego no centro.

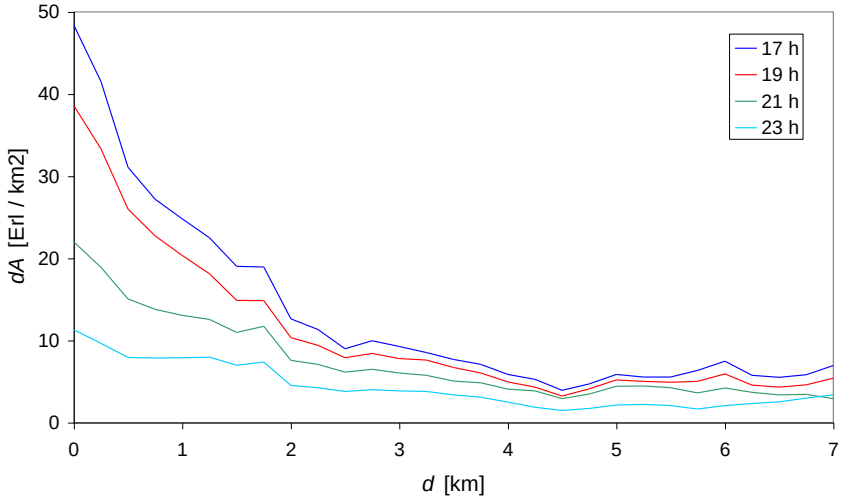


Figura 4.9 – Variação da densidade de tráfego média para o sector Sul & Este no período final do dia.

Para analisar a variação relativa da densidade de tráfego, estudaram-se as distribuições espaciais normalizadas para diferentes horas repetindo, para cada uma, o processo de aproximação já efectuado para as 17h.

Foi efectuada uma análise geral para todos os sectores para as horas consideradas mais importantes. Os resultados desta análise para os três sectores apresentam-se no Anexo G. O sector Sul & Este foi analisado com maior pormenor, apresentando-se os resultados de seguida. Começou-se por analisar a variação do desvio padrão dos diversos perfis que pertencem ao sector Sul & Este, apresentando-se os valores obtidos na Tabela 4.4. Como se pode observar, o desvio padrão é menor para as horas mais carregadas, aumentando bastante de manhã e à noite, o que significa uma maior dispersão espacial do tráfego.

Tabela 4.4 – Variação temporal do desvio padrão dos perfis para o sector Sul & Este.

t [h]	$d.p._{sector}$
0	0.148
7	0.102
9	0.082
11	0.088
13	0.091
15	0.086
17	0.080
19	0.077
21	0.109
23	0.139

A variação da densidade de tráfego no sector Sul & Este foi aproximada, para cada hora, pelas funções exponencial / linear e linear por troços, de forma a observar a sua variação temporal. Os resultados das aproximações apresentam-se nas Tabelas 4.5 e 4.6.

Tabela 4.5 – Variação temporal dos parâmetros da aproximação pela função exponencial / linear para o sector Sul & Este.

t [h]	*Del* [km]	*Cel*	*dq* [km]	*e. q. m.*
0	2.640	0.180	4.533	0.063
7	1.266	0.196	2.065	0.067
9	1.449	0.165	2.610	0.047
11	1.732	0.148	3.315	0.035
13	1.810	0.134	3.631	0.029
15	1.687	0.142	3.297	0.031
17	1.572	0.131	3.201	0.031
19	1.635	0.132	3.315	0.028
21	2.142	0.169	3.814	0.041
23	2.598	0.185	4.390	0.060

Tabela 4.6 – Variação temporal dos parâmetros da aproximação pela função linear por troços para o sector Sul & Este.

t [h]	*Alt* [1/km]	*Blt*	*Clt* [1/km]	*Dlt*	dq_1 [km]	dq_2 [km]	*e. q. m.*
0	-0.570	0.830	-0.164	0.174	0.417	4.010	0.060
7	-0.946	0.526	-0.104	0.181	0.563	3.314	0.050
9	-0.762	0.602	-0.143	0.159	0.643	3.093	0.036
11	-0.656	0.733	-0.201	0.152	0.586	2.891	0.031
13	-0.585	0.798	-0.233	0.143	0.572	2.817	0.029
15	-0.652	0.749	-0.214	0.147	0.574	2.809	0.028
17	-0.682	0.706	-0.203	0.133	0.614	2.827	0.027
19	-0.642	0.710	-0.200	0.139	0.657	2.855	0.029
21	-0.616	0.736	-0.160	0.172	0.579	3.535	0.036
23	-0.575	0.810	-0.155	0.183	0.452	4.041	0.057

Verifica-se que a concentração de tráfego no centro é máxima nas horas de pico e mínima durante o período nocturno. O decaimento da densidade de tráfego com a distância é máximo para as horas mais carregadas, diminuindo consideravelmente durante a noite, altura em que se observa um máximo na relação densidade de tráfego na periferia / densidade de tráfego no centro. Para melhor ilustrar esta variação apresenta-se, na Figura 4.10, a variação dos parâmetros *Cel* e *Dlt*, que representam a relação entre a densidade de tráfego na periferia e a densidade de tráfego no centro.

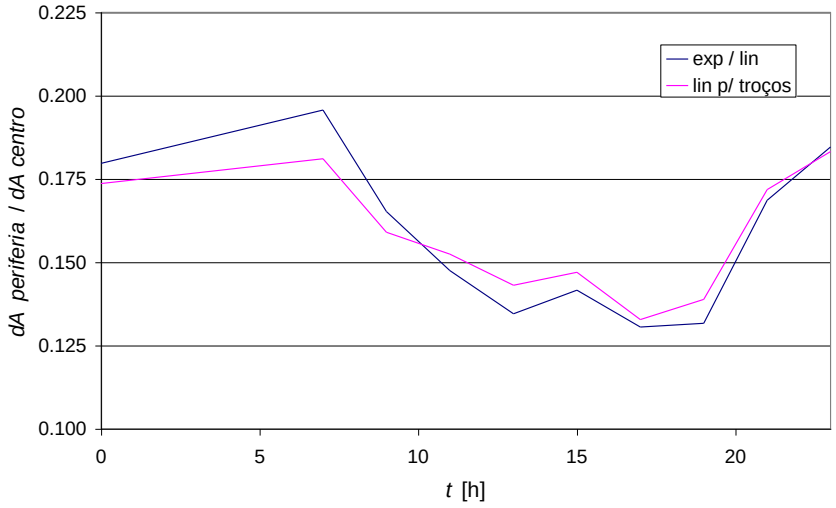


Figura 4.10 – Variação da relação densidade de tráfego na periferia / densidade de tráfego no centro para os modelos exponencial / linear e linear por troços, no sector Sul & Este.

Saliente-se que os parâmetros dos modelos apresentados nas Tabelas 4.5 e 4.6 apresentam uma variação temporal semelhante à variação temporal da densidade de tráfego no sistema verificada no Capítulo 3. Apresenta-se na Figura 4.11 a variação temporal do parâmetro *Del*, constante de decaimento do modelo exponencial / linear para o sector Sul & Este. Verifica-se que este parâmetro toma os valores mais elevados nas horas de menor tráfego (período nocturno), verificando-se, mais uma vez, a menor concentração do tráfego em redor do centro neste período.

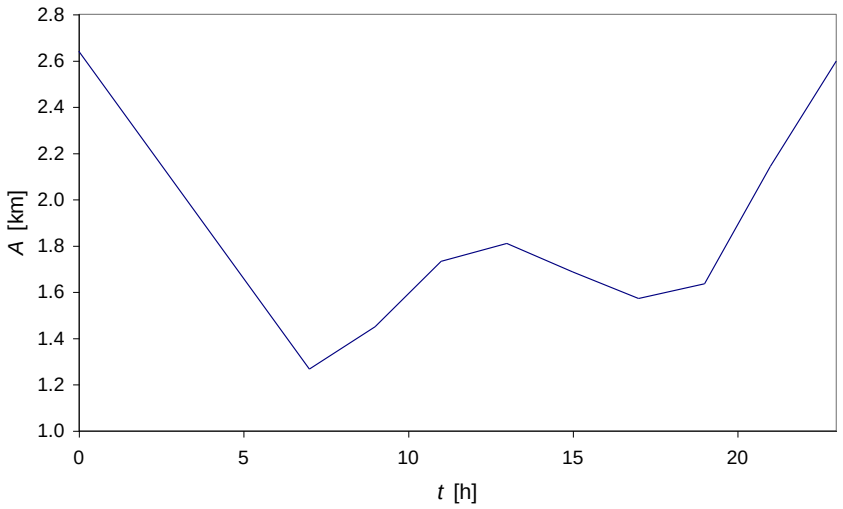


Figura 4.11 – Variação temporal do parâmetro *Del*, constante de decaimento do modelo exponencial / linear para o sector Sul & Este.

A variação apresentada por estes parâmetros é, como já foi referido, comparável à variação da densidade de tráfego verificada no sistema, com "máximos" nas horas de ponta. Nota-se, no entanto, que estes "máximos" se encontram mais desviados da hora de almoço, alargando mais a curva. Este facto está relacionado com a distribuição relativa do tráfego pelo sistema revelando a maior ou menor concentração do tráfego no centro.

4.5. Modelo de Tráfego Espacial / Temporal

Na Secção 3.4.3. apresentou-se um modelo de tráfego que classificava as células de acordo com a sua geografia. Como se verificou, esse modelo apresenta erros significativos devido à grande dispersão de amplitudes de densidade de tráfego verificadas dentro de cada classe. Esta dificuldade pode ser ultrapassada com um modelo que considere a variação espacial estudada neste capítulo em conjunto com a variação temporal.

Considerando as variações espacial e temporal de modo independente, a densidade de tráfego numa dada célula do sistema, $dA(t)$, é dada por:

$$dA(t) = A \cdot da_{sector}(d) \cdot a(t) \tag{4.9}$$

onde:

A	é a densidade de tráfego no centro à hora de ponta;
$da_{sector}(d)$	é a densidade de tráfego normalizada à distância d do centro, para o sector que contém a célula;
$a(t)$	é o tráfego normalizado no instante t.

Dado que os modelos normalizados de duas gaussianas são bastante semelhantes, tomou-se para a variação temporal, $a(t)$, a média das aproximações de duas gaussianas, dada na Tabela 3.2, isto é:

$$a(t_{desv}) = \begin{cases} 0.92 \cdot e^{-\frac{(t_{desv}-6.5)^2}{2 \cdot 2.14^2}} & t_{desv} \leq 8.2 \\ 0.94 \cdot e^{-\frac{(t_{desv}-11.8)^2}{2 \cdot 4.19^2}} & t_{desv} > 8.2 \end{cases} \tag{4.10}$$

A variação espacial é dada pelo modelo obtido para a hora de ponta, 17h, ou seja, a expressão (4.4) ou (4.5), conforme se trate do modelo exponencial / linear ou linear por troços, com os parâmetros apresentados na Tabela 4.2. A amplitude da densidade de tráfego no centro utilizada para este modelo é o valor obtido para as 17h, A = 48.4 Erl / km^2.

Através deste modelo e de modo idêntico ao efectuado em 3.4.3., foram estimadas as densidades de tráfego horárias para todas as células no sistema. Ambos os modelos de variação espacial, exponencial / linear e linear por troços, foram testados. Utiliza-se, para quantificar o erro, a expressão (4.11), a mesma que foi utilizada em 3.4.3., de modo a possibilitar a comparação directa dos erros.

$$e(t) = \frac{mod(t) - dA(t)}{\max\{dA(t)\}} \tag{4.11}$$

Embora este modelo não faça distinções de áreas, separaram-se as células pelas diferentes classes definidas no Capítulo 3 de modo a possibilitar a comparação directa dos erros. Os erros médios são obtidos através da média quadrática dos erros de cada célula da classe, sendo apresentados na Tabela 4.7.

Comparando os erros obtidos através deste modelo com os obtidos em 3.4.3., observa-se uma diminuição significativa nos erros das classes centro urbano e residencial, enquanto que, para a classe suburbana, os erros aumentam. Conclui-se, assim, que o modelo tem um bom desempenho nas áreas de maior tráfego, ou seja, aquelas em que são necessárias

estimativas mais exactas. Os elevados erros verificados nas zonas suburbanas devem-se, na maioria dos casos, a uma sobrestimação da densidade de tráfego. Mais uma vez, a diferença entre os erros obtidos com qualquer uma das aproximações espaciais não é significativa.

Tabela 4.7 – Comparação dos erros médios dos modelos de densidade de tráfego espacial / temporal e do modelo temporal por classes do Capítulo 3.

$\overline{e.q.r.}$ [%]	C	CE	R	RE	S	SE
Exponencial / Linear	38.7	25.5	40.7	37.5	120.4	163.0
Linear p/ Troços	37.6	27.4	40.6	31.3	161.9	187.6
Modelo Temporal por Classes	43.4	67.0	52.9[11]	73.7	92.6[12]	91.3

Para uma aplicação deste modelo a uma área genérica, uma abordagem possível é a seguinte:

- estimar o máximo da densidade de tráfego no sistema e a sua localização;
- escolher o modelo espacial pretendido: exponencial / linear ou linear por troços;
- se for caso disso, separar a área por sectores de geografia semelhante e escolher os parâmetros respectivos;

Os parâmetros da variação espacial estão sobretudo ligados à morfologia da cidade, enquanto que a variação temporal relaciona-se mais com os horários laborais e os hábitos das pessoas. Na aplicação deste modelo a outros cenários, deve-se ter em conta este facto, podendo ser necessário efectuar alguns ajustes nos parâmetros.

4.6. Estimativa do Tráfego por Pessoa para o Concelho de Lisboa

No Capítulo 2 referiu-se que, normalmente, se recorre a estatísticas da população, dados sobre movimentos pendulares, etc., para estimar a distribuição da população para a hora de ponta. Obtém-se, então, a distribuição de tráfego multiplicando a distribuição da população por um factor de escala, (2.5).

[11] Valor correspondente ao modelo de duas gaussianas.

[12] Valor correspondente ao modelo de duas gaussianas.

Pretende-se, nesta secção, verificar a relação entre a densidade de tráfego real e uma estimativa da densidade populacional para o concelho de Lisboa. Para tal, foram obtidas as estatísticas de população residente e empregos por freguesia, bem como dados sobre o número de entradas e saídas do concelho, ambos disponíveis em [12]. A população por freguesia em hora de ponta foi estimada como sendo directamente proporcional ao número de empregos, critério baseado no facto de que as actividades no concelho de Lisboa se centram no sector dos serviços. No Anexo H, apresenta-se o cálculo da densidade populacional por freguesia.

É importante notar que os dados populacionais datam de 1991, enquanto que os dados de tráfego se referem a 1997. Embora esta diferença de seis anos não seja grande, pode conduzir a erros significativos em zonas que tenham evoluído bastante neste período.

Finalmente, foi efectuada a divisão ponto-a-ponto do mapa de densidade de tráfego às 17h, pela densidade populacional calculada no Anexo H, obtendo-se o mapa com a distribuição do tráfego por pessoa que se apresenta na Figura 4.12.

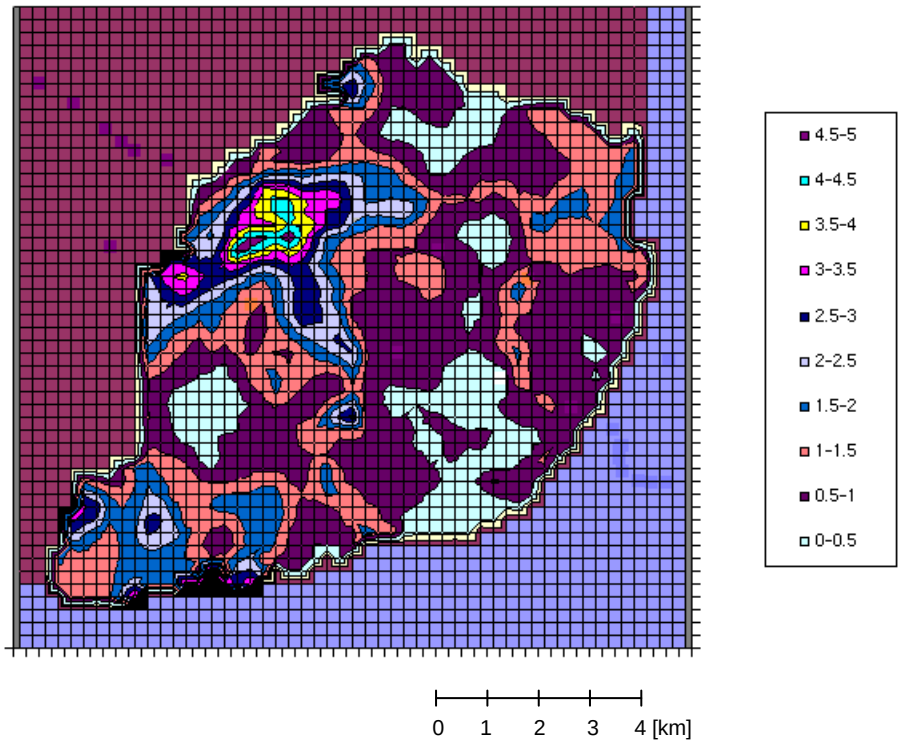


Figura 4.12 – Distribuição de tráfego por pessoa no Concelho de Lisboa em hora de ponta, [mErl / pessoa].

Excluindo o pico verificado na zona de Carnide, observa-se que o valor de tráfego por pessoa não apresenta grandes variações, oscilando entre 0.5 e 1.5 mErl / pessoa. O pico

observado pode dever-se à desactualização dos dados demográficos, visto que se situa numa zona que sofreu maior desenvolvimento nos últimos anos.

Em média, a relação obtida é:

$$t_{pen} \cdot t_{util} \cdot \overline{A_{util}} = 1.18 \text{ mErl / pessoa} \tag{4.12}$$

A região de Lisboa apresenta um poder de compra bastante superior, em média, ao do resto do país, pelo que se considera t_{pen} = 10 %, aproximadamente igual ao dobro da taxa de penetração nacional da operadora na altura dos dados. Admitindo ainda $\overline{A_{util}}$ = 20 mErl, obtém-se t_{util} = 60 %, valores tipicamente utilizados para este tipo de estimativas. Não é de esperar que o valor $\overline{A_{util}}$ apresentado atrás tenha erros muito significativos, visto que é independente da distribuição populacional efectuada e que o número de pessoas presentes no concelho durante o dia não variou muito nos últimos anos.

Observando a Figura 4.12, nota-se que o centro da cidade, onde se encontram as zonas que apresentam maior densidade de tráfego real (Baixa Pombalina, Marquês de Pombal, etc.) correspondem a relações de tráfego por utilizador relativamente baixas, ao passo que zonas mais periféricas, apresentam valores de tráfego por utilizador bastante elevado, facto que pode dever-se a uma incorrecta distribuição da população por freguesia.

5. Conclusões

Pretendeu-se com este trabalho, analisar o tráfego de sistemas móveis celulares e desenvolver modelos que descrevam as suas distribuições temporal e espacial.

É feita uma breve análise teórica sobre o tráfego e sobre as características particulares do tráfego de redes celulares. Em trabalhos anteriores, conclui-se que a mobilidade tem grande influência ao nível da estatística das chamadas, no entanto existem poucos estudos sobre a variação quer temporal quer espacial do tráfego do sistema. São ainda discutidas as implicações que a distribuição do tráfego tem no planeamento celular.

Para o desenvolvimento dos modelos, foram analisados dados relativos ao tráfego de 199 células de GSM da área metropolitana de Lisboa. Os dados reportam ao primeiro semestre de 1997, consistindo no tráfego das três piores quintas-feiras de três meses consecutivos e num mapa com a localização de cada célula.

Na análise temporal, estabeleceram-se modelos para a distribuição diária do tráfego normalizado para células agrupadas em diferentes classes geográficas:

- Centro urbano (C)
- Centro urbano com Estradas (CE)
- Residencial (R)
- Residencial com Estradas (RE)
- Suburbana (S)
- Suburbana com Estradas (SE)

Os modelos são funções do tipo duas gaussianas ou trapézio. O modelo de duas gaussianas tem tipicamente dois picos de tráfego, às 11h 30m e 16h 50m, e uma pequena quebra à hora de almoço, às 13h 10m. O desvio da segunda gaussiana, é cerca do dobro do da primeira para todas as classes (valores de cerca de 4h e 2h), revelando uma queda nocturna bastante mais suave que a subida matinal. A função trapézio caracteriza-se por ter tráfego constante durante uma grande parte do dia, entre as 10h e as 22h tipicamente, e por apresentar a ascensão matinal e a queda nocturna do tráfego com declives idênticos. A aproximação duas

guassianas modela melhor a maioria das células, 78 % dos casos, sendo que as células aproximadas pela função trapézio se encontram, na sua maioria, nas classes R e S. As células com importantes eixos rodoviários são melhor modeladas pela função duas gaussianas. Verifica-se que a forma de trapézio está mais indicada para zonas habitacionais, com uma importante contribuição de tráfego de final do dia. Relativamente aos modelos de duas gaussianas, observa-se que a forma da variação temporal do tráfego varia pouco com o tipo de geografia da célula, verificando-se algumas tendências:

- à medida que se sai do centro para a periferia (C $\rightarrow$ R $\rightarrow$ S), as horas de pico afastam-se da hora de almoço, alargando a curva;
- numa mesma zona, a presença de importantes eixos rodoviários provoca um afastamento das horas de pico.

Em geral, os modelos desenvolvidos descrevem bem a forma temporal do tráfego, apresentando os erros quadráticos médios entre 0.086 e 0.133.

Definem-se modelos de distribuição temporal da densidade de tráfego para as mesmas classes, verificando-se que a distinção entre diferentes classes é, sobretudo, feita pela amplitude de densidade de tráfego, Tabela 5.1. Os erros médios destes modelos são bastante superiores aos dos modelos normalizados, o se deve à elevada dispersão de amplitudes verificada dentro de uma mesma classe: por exemplo, na classe C, o pico da densidade de tráfego varia entre 8.52 Erl / km^2 e 66.40 Erl / km^2. Os erros são mais baixos nas áreas de centro urbano e residencial, zonas onde a exactidão dos modelos é mais importante.

Tabela 5.1 – Amplitude dos modelos de densidade de tráfego.

	C	CE	R		RE	S		SE
			2 G	T		2 G	T	
$dA_{máx}$ [Erl/km^2]	26.35	32.63	10.52	8.93	8.16	2.29	2.76	2.86

Relativamente à distribuição espacial do tráfego, estabelecem-se modelos para o decaimento da densidade de tráfego em função da distância, para a hora de ponta e para diferentes sectores com geografia semelhante: sector Norte, sector Oeste e sector Sul & Este. Os modelos são definidos por duas funções: a função exponencial / linear e a função linear por troços. Ambas as funções são definidas por troços e assumem uma densidade de tráfego constante nas zonas periféricas, correspondente a cerca de 5 % do valor no centro. A variação da densidade de tráfego nas zonas próximas do centro é modelada por uma exponencial

decrescente, com um factor de decaimento entre 1.22 e 2.38 km, para a função exponencial / linear, e por dois segmentos de recta, no caso da função linear por troços. O primeiro troço tem um declive de cerca de 34 (Erl/km^2)/km, enquanto que o segundo declive varia entre valores de 0.5 a 10 (Erl/km^2)/km. Em 60 % dos casos, os modelos apresentam erros médios inferiores a 4 % da densidade de tráfego no centro, para os sectores Norte e Oeste, e 8 % para o sector Sul & Este.

Analisa-se a evolução temporal da distribuição espacial de tráfego, observando-se que o parâmetro que apresenta maior variação é a amplitude. A distribuição espacial mantém a forma ao longo do dia, variando a sua amplitude de modo idêntico em toda a área de serviço. A relação da densidade de tráfego centro / periferia é máxima nos períodos de maior tráfego, o que evidencia a particular concentração de tráfego no centro nas horas de ponta.

Define-se um modelo de densidade de tráfego baseado nos modelos temporais e espaciais anteriormente apresentados. Neste modelo a forma da densidade de tráfego é descrita pela função duas gaussianas, enquanto que a amplitude é dada pelo modelo de variação espacial, permitindo colmatar a principal limitação dos modelos por classes. Verifica-se uma melhoria significativa em relação aos modelos anteriormente definidos para as classes C, CE, R e RE, com erros da ordem de 30 %, e uma degradação para as zonas suburbanas. Mais uma vez, é de notar que o modelo tem um melhor desempenho para as classes C, CE, R e RE, onde é importante ter boas estimativas de tráfego.

Para uma completa caracterização do tráfego, há aspectos que não foram considerados neste trabalho, sendo referidos como sugestões de desenvolvimento futuro:

- análise da mobilidade dos utilizadores e da sua influência nas distribuições de tráfego;
- análise da variação do tráfego ao longo da semana;
- análise da evolução do tráfego a longo prazo.

Neste trabalho, optou-se por desenvolver modelos de tráfego simples e de fácil aplicação, que representassem um bom compromisso entre complexidade e erros apresentados. Os modelos desenvolvidos são apropriados para uma primeira estimativa, podendo servir como base de desenvolvimento de modelos mais complexos, que contabilizem factores não considerados aqui. Pensamos que se atingiu o objectivo.

Referências

[1] Yacoub,M.D., *Foundations of Mobile Radio Engineering*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993.

[2] Correia,L.M., *Comunicações Móveis – Cópia de Acetatos e Problemas*, AEIST, Lisboa, 1998.

[3] Steele,R., *Mobile Radio Communications*, Pentech Press, London, UK, 1992.

[4] Mouly,M. and Pautet,M.-B., *The GSM System for Mobile Communications*, M. Mouly et Marie-B. Pautet, Palaiseau, France, 1992.

[5] Faruque,S., *Cellular Mobile Systems Engineering*, Artech House, Boston, Mass., USA, 1996.

[6] Jabbari,B., "Teletraffic Aspects of Evolving and Next-Generation Wireless Communication Networks", *IEEE Personal Communications Magazine*, Vol. 3, No. 6, Dec. 1996, pp. 4-9.

[7] Jensen,T., "Teletraffic Analysis of Mobile Communications Systems", *Telektronikk, Telenor R&D*, Norway, Vol. 91, No. 4, 1995, pp. 103 - 118.

[8] Yates,J.A. and Foose,W.A., "A Simplified Approach to Growth Planning for Cellular Systems", in *Proc. of VTC'93 - 43rd IEEE Vehicular Technology Conference*, Secaucus, New Jersey, USA, May 1993.

[9] Asakura,H. and Fujii, T., *Combining Micro and Macro Cells in a Cellular System*, IEEE, 1993.

[10] Tutschku,K., Leskien,T., and Tran-Gia,P., "*Traffic Estimation and Characterization for the Design of Mobile Communication Netwoks*", Report No. 171, Research Report Series, Institute of Computer Science, University of Würzburg, Apr. 1997.

[11] Baier,A. and Bandelow,K., "Traffic Engineering and Realistic Network Capacity in Cellular Radio Networks With Inhomogeneous Traffic Distribution", in *Proc. of VTC'97 - 47th IEEE Vehicular Technology Conference*, Phoenix, Arizona, USA, May 1997.

[12] *Censos – Recenseamento da População e Habitação – Resultados Definitivos, 1991*, Instituto Nacional de Estatística, 1994.

[13] Leon-Garcia,A., *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*, Addison-Wesley, Mass., USA, 1993.

Anexo A

Mapa de Cobertura e Classificação das Células

Neste Anexo apresenta-se a localização das células na área de serviço e algumas informações sobre a sua classificação. Na Tabela A.1 apresenta-se, para cada célula, o tráfego máximo registado, a área e a sua classificação geográfica, de acordo com a análise efectuada no Capítulo 3. Na Figura A.1 está representado o mapa da área de serviço, estando cada célula representada por uma cor distinta; cada elemento de área é um quadrado com 250 m de lado. Como se pode verificar, existem células com dimensões muito diferentes, evidenciando os diferentes tipos de zona coberta. Observa-se a concentração de células com áreas muito pequenas no centro urbano, onde a densidade de tráfego é maior.

Tabela A.1 – Parâmetros e classificação das células analisadas.

Célula	$A_{máx}$ [Erl]	Área [km^2]	Classe
0	7.90	4.38	S
1	8.31	1.19	RE
2	5.16	3.00	S
3	7.36	2.63	R
4	6.72	0.69	R
5	4.65	0.81	SE
6	16.75	1.31	RE
7	3.20	0.31	CE
8	6.26	0.13	CE
9	2.95	0.06	*
10	7.40	0.88	RE
11	8.52	2.31	SE
12	11.00	1.31	S
13	3.68	0.44	RE
14	6.33	0.94	SE
15	2.96	3.13	S
16	6.39	0.44	R
17	5.19	0.13	C
18	6.22	0.50	R
19	6.99	0.63	R
20	4.64	0.13	C

Tabela A.1 – Parâmetros e classificação das células analisadas (cont.).

Célula	$A_{máx}$ [Erl]	Área [km^2]	Classe
21	4.10	0.19	C
22	8.29	0.31	C
23	3.00	0.06	*
24	3.67	0.31	C
25	4.65	0.38	C
26	7.12	0.13	C
27	15.64	0.06	*
28	5.83	0.81	R
29	9.30	1.00	R
30	9.46	1.44	R
31	10.84	1.06	R
32	5.10	0.19	R
33	5.82	0.44	R
34	8.27	0.56	R
35	2.20	0.44	R
36	4.18	0.56	RE
37	1.02	0.44	SE
38	3.30	0.31	RE
39	6.66	0.81	R
40	2.95	0.13	R
41	3.26	0.31	R
42	11.15	1.31	R
43	9.70	1.69	R
44	9.47	5.50	S
45	13.14	5.69	SE
46	9.52	3.56	SE
47	6.09	1.06	RE
48	8.17	2.25	RE
49	3.24	2.00	S

Tabela A.1 – Parâmetros e classificação das células analisadas (cont.).

Célula	$A_{máx}$ [Erl]	Área [km^2]	Classe
50	7.77	2.50	SE
51	4.66	1.06	RE
52	4.60	0.13	C
53	4.19	0.88	SE
54	4.26	0.44	RE
55	5.35	0.25	C
56	5.56	0.56	RE
57	4.17	0.06	*
58	1.64	0.19	C
59	3.67	0.13	C
60	8.95	0.38	C
61	7.22	0.31	C
62	10.08	0.44	CE
63	4.72	0.31	C
64	4.41	0.25	C
65	7.53	0.19	C
66	3.97	0.25	R
67	3.02	0.25	R
68	4.21	0.19	C
69	4.86	6.88	SE
70	1.94	1.75	S
71	6.08	2.56	S
72	6.92	0.19	C
73	6.03	0.69	RE
74	3.61	0.63	R
75	5.41	0.94	RE
76	7.90	0.31	CE
77	7.02	0.31	C
78	8.34	0.13	C

Tabela A.1 – Parâmetros e classificação das células analisadas (cont.).

Célula	$A_{máx}$ [Erl]	Área [km^2]	Classe
79	8.79	0.38	R
80	5.38	0.31	R
81	3.64	0.75	R
82	1.59	0.13	R
83	2.93	1.00	S
84	3.39	0.88	SE
85	5.42	0.50	RE
86	6.17	0.44	C
87	7.50	0.19	C
88	5.24	0.25	C
89	4.57	0.69	*
90	11.78	0.44	*
91	8.43	1.06	R
92	7.61	0.75	RE
93	11.64	1.19	RE
94	4.50	0.56	R
95	14.73	1.00	RE
96	8.70	0.63	RE
97	11.18	0.13	CE
98	4.96	0.06	*
99	2.45	0.06	*
100	4.30	0.13	C
101	4.02	0.25	C
102	7.74	2.63	S
103	4.40	0.63	R
104	7.55	1.75	SE
105	6.80	1.25	SE
106	3.69	2.75	SE
107	9.46	0.88	S

Tabela A.1 – Parâmetros e classificação das células analisadas (cont.).

Célula	$A_{máx}$ [Erl]	Área [km^2]	Classe
108	8.65	1.25	R
109	1.43	1.06	S
110	0.77	0.75	SE
111	0.20	0.44	S
112	0.13	0.25	S
113	0.30	0.56	SE
114	0.47	0.19	SE
115	5.15	1.75	SE
116	8.62	0.75	R
117	10.33	0.44	R
118	7.58	4.19	S
119	7.08	5.38	SE
120	7.79	4.94	S
121	6.74	10.38	SE
122	8.56	1.00	S
123	15.09	2.56	SE
124	5.16	1.19	R
125	5.92	0.81	R
126	8.31	0.31	C
127	4.53	1.56	RE
128	4.40	0.50	R
129	7.05	0.63	RE
130	3.80	0.50	R
131	6.98	1.13	R
132	3.56	0.25	R
133	12.04	0.56	CE
134	7.07	0.13	CE
135	7.04	0.19	C
136	9.83	0.31	C

Tabela A.1 – Parâmetros e classificação das células analisadas (cont.).

Célula	$A_{máx}$ [Erl]	Área [km^2]	Classe
137	7.84	0.63	CE
138	16.09	12.56	S
139	8.76	1.63	R
140	5.83	2.88	S
141	10.43	0.50	CE
142	4.21	0.13	R
143	3.11	1.13	RE
144	2.02	0.19	CE
145	4.20	0.13	C
146	3.34	0.13	C
147	5.10	5.19	S
148	9.17	4.38	RE
149	15.89	5.88	RE
150	4.04	0.06	*
151	7.55	0.25	C
152	3.53	0.06	*
153	1.49	0.63	S
154	3.98	0.75	R
155	2.06	0.31	S
156	5.89	0.88	RE
157	8.71	0.44	R
158	2.91	0.38	R
159	7.41	0.31	C
160	10.51	0.19	C
161	6.29	0.19	CE
162	3.25	1.50	SE
163	4.51	2.50	RE
164	6.92	2.56	SE
165	8.37	2.75	RE

Tabela A.1 – Parâmetros e classificação das células analisadas (cont.).

Célula	$A_{máx}$ [Erl]	Área [km^2]	Classe
166	4.03	0.38	R
167	3.45	0.50	R
168	4.89	0.56	C
169	7.06	0.19	C
170	1.88	0.56	R
171	1.55	0.25	R
172	2.50	0.38	R
173	2.36	0.06	*
174	3.99	0.06	*
175	12.81	0.69	R
176	9.12	0.63	R
177	2.54	0.63	R
178	5.38	4.31	S
179	2.89	5.56	S
180	2.32	3.88	S
181	3.29	0.19	C
182	2.66	0.19	C
183	7.54	0.13	C
184	5.10	1.56	SE
185	6.73	0.44	RE
186	10.27	0.63	R
187	5.05	1.00	R
188	1.83	0.50	R
189	6.80	0.88	R
190	7.34	1.00	RE
191	2.57	0.81	S
192	3.70	1.13	S
193	2.75	2.25	S
194	1.66	0.88	S

Tabela A.1 – Parâmetros e classificação das células analisadas (cont.).

Célula	$A_{máx}$ [Erl]	Área [km^2]	Classe
195	3.94	0.50	S
196	2.57	0.19	C
197	2.40	0.13	C
198	4.45	0.19	C

As abreviaturas da classe, na Tabela A.1, correspondem às seguintes classes geográficas:

C Centro urbano

CE Centro urbano com Estradas

R Residencial

RE Residencial com Estradas

S Suburbano

SE Suburbano com Estradas

* Estas células não foram consideradas

Anexo B

Gráficos das Aproximações às Curvas de Tráfego

Apresentam-se, neste anexo, os casos extremos, em termos de erros, das aproximações às curvas de tráfego, para as funções duas gaussianas e trapézio.

Nas Figuras B.1 e B.2 apresentam-se o melhor e o pior caso de células aproximadas pela função duas gaussianas, respectivamente; nas Figuras B.3 e B.4, encontram-se os casos análogos para a função trapézio.

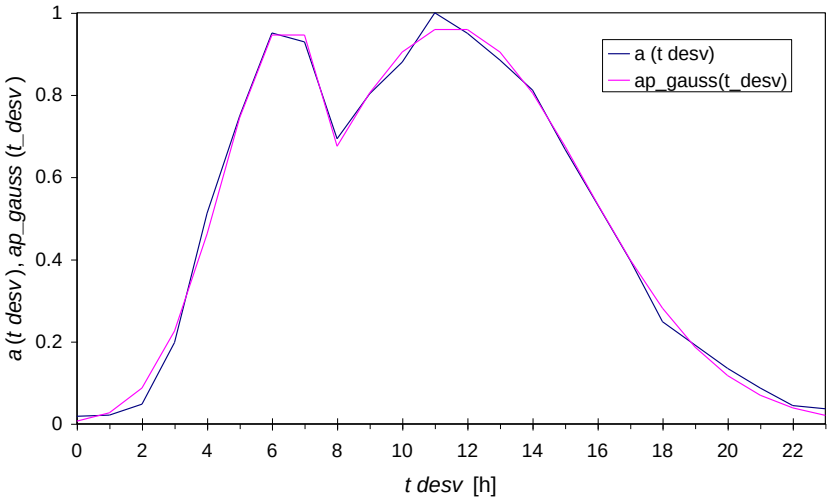


Figura B.1 – Melhor caso da aproximação duas gaussianas com *e.q.m.* = 0.021.

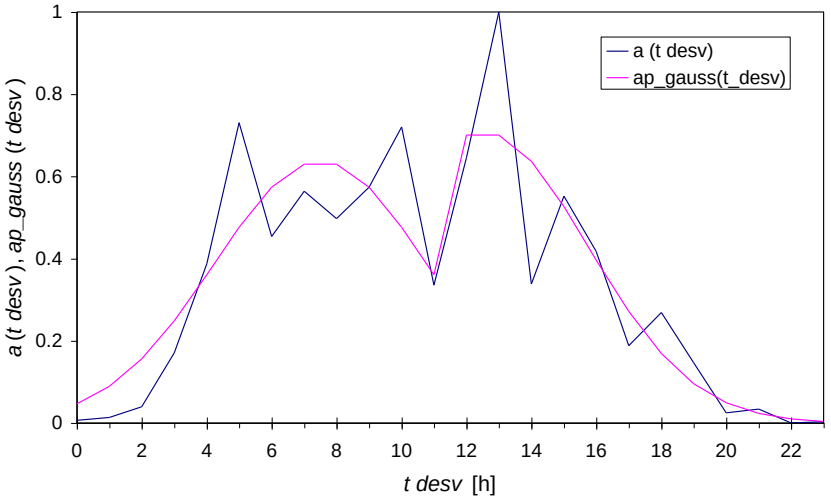


Figura B.2 – Pior caso da aproximação duas gaussianas com *e.q.m.* = 0.128.

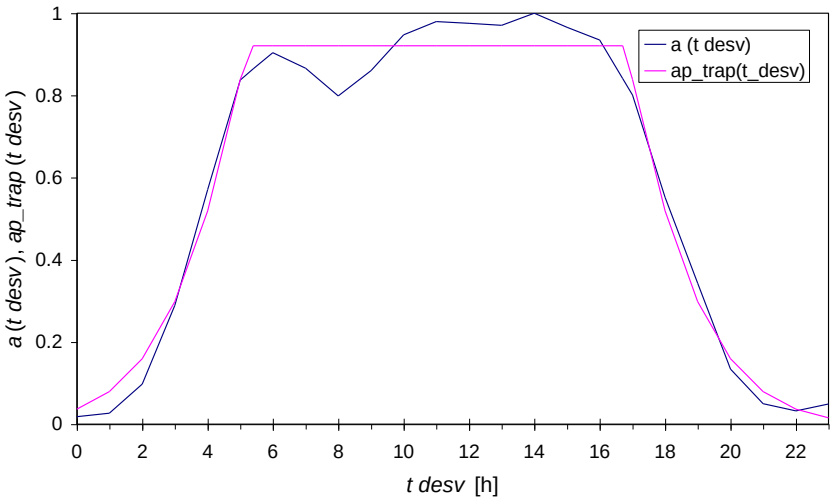


Figura B.3 – Melhor caso da aproximação trapézio com *e.q.m.* = 0.049.

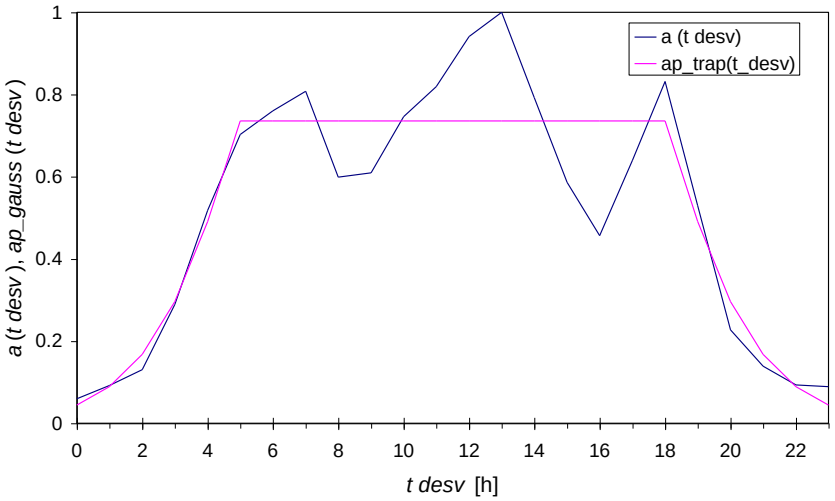


Figura B.4 – Pior caso da aproximação trapézio com *e.q.m.* = 0.111.

Anexo C

Modelos Normalizados de Distribuição Temporal

Apresenta-se neste anexo, a estatística dos parâmetros dos modelos normalizados por classe, bem como um conjunto de figuras onde se comparam os modelos desenvolvidos.

Os resultados estatísticos foram obtidos a partir da análise dos parâmetros das aproximações de cada célula, através das funções duas gaussianas e trapézio. Nas Tabelas C.1 e C.2 encontra-se a análise estatística de cada parâmetro do modelo, para os modelos trapézio e duas gaussianas, respectivamente.

Tabela C.1 – Estatística dos parâmetros dos modelos normalizados da função trapézio.

		h_t [h]	p	d_t [h]	c	tq_1 [h]	tq_2 [h]
R	Média	16.1	2.91	3.64	0.85	10.4	21.7
	D.Padrão	0.2	0.36	0.1	0.05	0.4	0.6
	Máximo	16.5	3.49	4.0	0.92	11.7	23.1
	Mínimo	15.5	1.92	3.5	0.74	9.9	20.3
S	Média	16.0	3.06	3.70	0.85	10.2	21.9
	D.Padrão	0.1	0.45	0.2	0.04	0.1	0.3
	Máximo	16.5	4.06	4.0	0.92	10.3	22.8
	Mínimo	16.0	2.37	3.5	0.79	9.9	21.7

Tabela C.2 – Estatística dos parâmetros dos modelos normalizados da função duas gaussianas.

		h_1 [h]	h_{alm} [h]	h_2 [h]	p_1	p_2	d_1 [h]	d_2 [h]
C	Média	11.7	13.1	16.7	0.91	0.94	2.11	4.32
	D.Padrão	0.3	0.4	0.6	0.06	0.05	0.20	0.58
	Máximo	12.0	14.0	17.5	1.04	1.03	2.53	5.74
	Mínimo	11.0	12.0	15.5	0.74	0.77	1.51	2.86
CE	Média	11.6	13.0	16.4	0.92	0.96	2.17	4.04
	D.Padrão	0.4	0.0	0.4	0.04	0.04	0.18	0.43
	Máximo	12.0	13.0	17.0	0.97	1.03	2.49	4.94
	Mínimo	10.5	13.0	16.0	0.83	0.92	1.91	3.44
R	Média	11.5	13.3	16.9	0.93	0.96	2.18	4.34
	D.Padrão	0.4	0.5	0.6	0.07	0.04	0.24	0.48
	Máximo	12.5	15.0	18.5	1.02	1.03	2.91	5.70
	Mínimo	10.5	13.0	15.5	0.74	0.89	1.83	3.11
RE	Média	11.3	13.0	17.0	0.91	0.96	2.13	4.16
	D.Padrão	0.5	0.0	0.5	0.08	0.07	0.20	0.37
	Máximo	12.0	13.0	18.0	1.04	1.04	2.57	4.92
	Mínimo	10.0	13.0	16.0	0.75	0.69	1.69	3.25
S	Média	11.3	13.3	16.9	0.90	0.88	2.16	4.07
	D.Padrão	0.6	0.7	0.8	0.12	0.10	0.42	0.45
	Máximo	13.0	16.0	18.0	1.04	0.99	3.06	4.76
	Mínimo	10.0	13.0	15.5	0.53	0.64	1.24	3.09
SE	Média	11.1	13.2	17.1	0.93	0.94	2.08	3.94
	D.Padrão	0.5	0.7	0.6	0.10	0.08	0.36	0.45
	Máximo	12.5	16.0	18.5	1.04	1.03	3.28	4.45
	Mínimo	10.0	13.0	16.0	0.64	0.71	1.51	2.72

Nas Figuras C.1 e C.2 apresentam-se a comparação entre os modelos sem e com estradas, respectivamente. Nas Figuras C.3 a C.5 estão representados os modelos sem e com estradas para as três classes, observando-se a influência de grandes eixos rodoviários na forma do tráfego. Finalmente, nas Figuras C.6 e C.7, representam-se os dois modelos possíveis, duas gaussianas e trapézio, para as classes R e S, respectivamente.

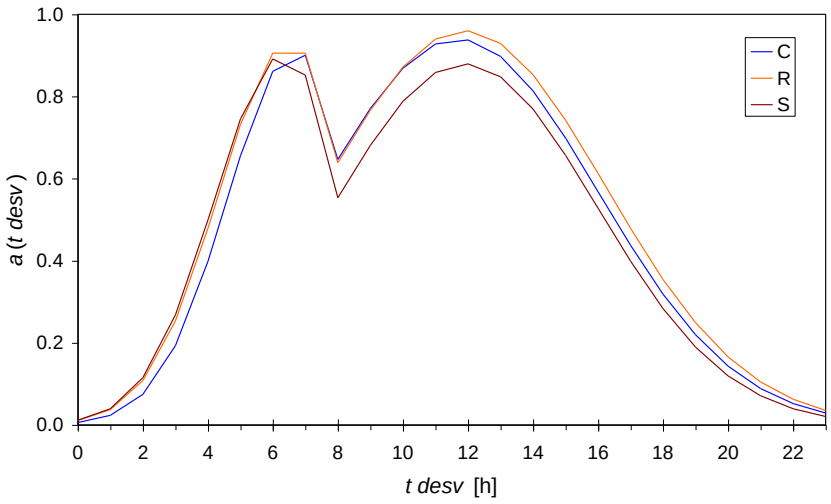


Figura C.1 – Modelos normalizados para as classes C, R e S.

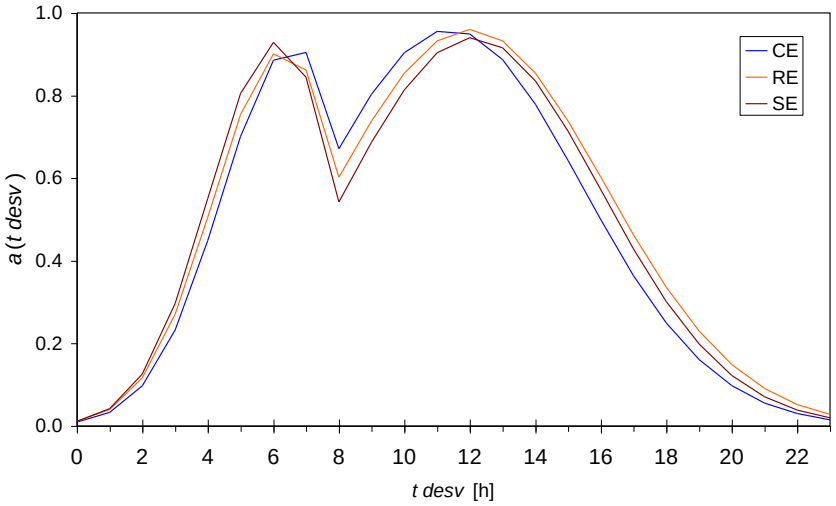


Figura C.2 – Modelos normalizados para as classes CE, RE e SE.

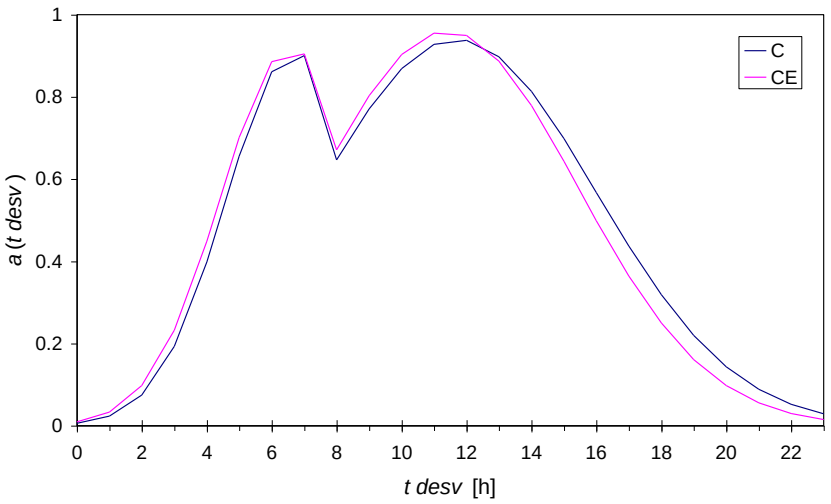


Figura C.2 – Modelos normalizados para as classes C e CE.

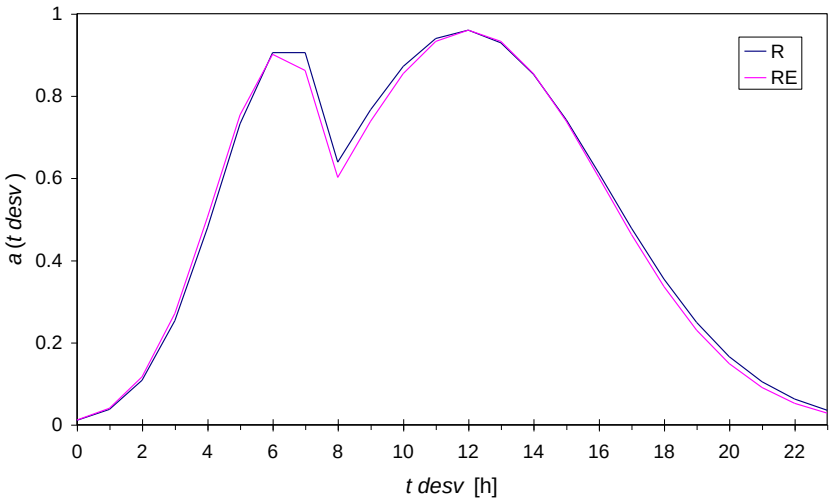


Figura C.4 – Modelos normalizados para as classes R e RE.

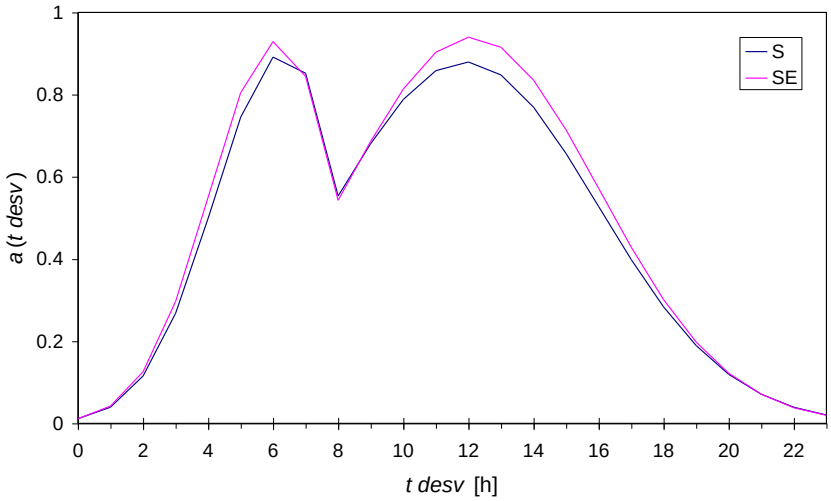


Figura C.5 – Modelos normalizados para as classes S e SE.

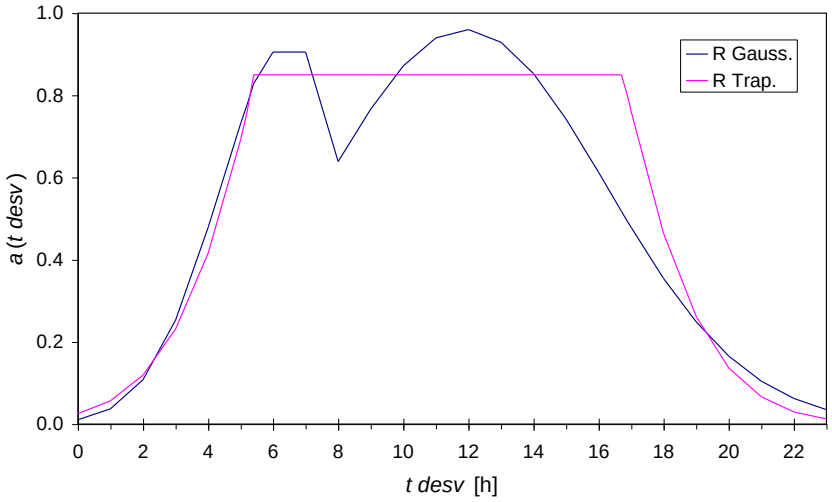


Figura C.6 – Modelos normalizados duas gaussianas e trapézio para a classe R.

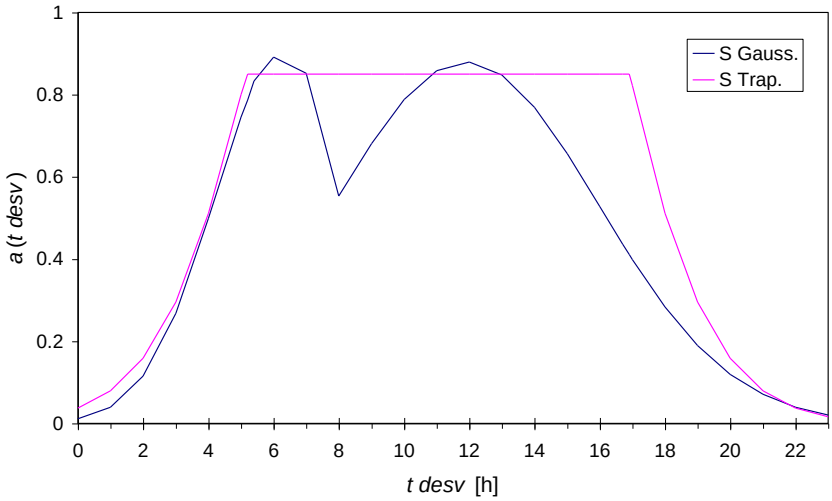


Figura C.7 - Modelos normalizados duas gaussianas e trapézio para a classe S.

Anexo D

Modelos de Distribuição Temporal da Densidade de Tráfego

Neste anexo apresenta-se uma análise estatística dos parâmetros dos modelos temporais de densidade de tráfego. Os modelos são obtidos como a média dos parâmetros das aproximações de cada célula, sendo a variação em torno da média aqui analisada.

Nas Tabelas D.1 e D.2, apresenta-se a estatística dos parâmetros dos modelos de densidade de tráfego para cada classe, respectivamente para os modelos trapézio e duas gaussianas. Os resultados foram obtidos a partir das aproximações às curvas de densidade de tráfego das células.

Tabela D.1 – Estatística dos parâmetros dos modelos da distribuição temporal da densidade de tráfego – função trapézio.

		h_t [h]	p [Erl/km^2]	d_t [h]	c [Erl/km^2]	tq_1 [h]	tq_2 [h]
R	Média	16.1	30.66	3.64	8.93	10.4	21.7
	D.Padrão	0.2	20.29	0.12	5.47	0.4	0.6
	Máximo	16.5	90.33	3.98	22.86	11.7	23.1
	Mínimo	15.5	6.60	3.48	2.45	9.9	20.3
S	Média	16.0	9.63	3.70	2.76	10.2	21.9
	D.Padrão	0.1	7.54	0.16	2.27	0.1	0.3
	Máximo	16.5	25.29	4.02	7.30	10.3	22.8
	Mínimo	16.0	3.35	3.48	0.93	9.9	21.7

Tabela D.2 – Estatística dos parâmetros dos modelos da distribuição temporal da densidade de tráfego – função duas gaussianas.

		h_1 [h]	h_{alm} [h]	h_2 [h]	p_1 [Erl/km^2]	p_2 [Erl/km^2]	d_1 [h]	d_2 [h]
C	Média	11.7	13.1	16.7	25.13	26.35	2.11	4.32
	D.Padrão	0.3	0.4	0.6	12.71	13.65	0.20	0.58
	Máximo	12.0	14.0	17.5	61.50	66.40	2.53	5.74
	Mínimo	11.0	12.0	15.5	8.52	6.73	1.51	2.86
CE	Média	11.6	13.0	16.4	30.93	32.63	2.17	4.04
	D.Padrão	0.4	0.0	0.4	20.09	21.77	0.18	0.43
	Máximo	12.0	13.0	17.0	77.14	84.89	2.49	4.94
	Mínimo	10.5	13.0	16.0	9.61	10.51	1.91	3.44
R	Média	11.5	13.3	16.9	10.24	10.52	2.18	4.34
	D.Padrão	0.4	0.5	0.6	6.15	6.25	0.24	0.48
	Máximo	12.5	15.0	18.5	33.16	32.51	2.91	5.70
	Mínimo	10.5	13.0	15.5	2.70	3.06	1.83	3.11
RE	Média	11.3	13.0	17.0	7.67	8.16	2.13	4.16
	D.Padrão	0.5	0.0	0.5	3.33	3.74	0.20	0.37
	Máximo	12.0	13.0	18.0	13.71	15.60	2.57	4.92
	Mínimo	10.0	13.0	16.0	2.08	2.07	1.69	3.25
S	Média	11.3	13.3	16.9	2.29	2.26	2.16	4.07
	D.Padrão	0.6	0.7	0.8	2.45	2.41	0.42	0.45
	Máximo	13.0	16.0	18.0	9.29	9.85	3.06	4.76
	Mínimo	10.0	13.0	15.5	0.39	0.33	1.24	3.09
SE	Média	11.1	13.2	17.1	2.78	2.80	2.08	3.94
	D.Padrão	0.5	0.7	0.6	1.65	1.68	0.36	0.45
	Máximo	12.5	16.0	18.5	5.93	6.10	3.28	4.45
	Mínimo	10.0	13.0	16.0	0.34	0.38	1.51	2.72

A amplitude é o parâmetro que apresenta maior dispersão dentro de cada classe, sendo, por isso, feita uma análise estatística mais pormenorizada. Apresentam-se nas Figuras D.1 a D.8 as funções distribuição para o parâmetro p_2 dos modelos de duas gaussianas e para o parâmetro c dos modelos trapézio. Analisa-se apenas um dos dois parâmetros da amplitude de cada modelo, podendo o valor correspondente do segundo parâmetro (p_1 ou p) ser estimado por simples proporcionalidade.

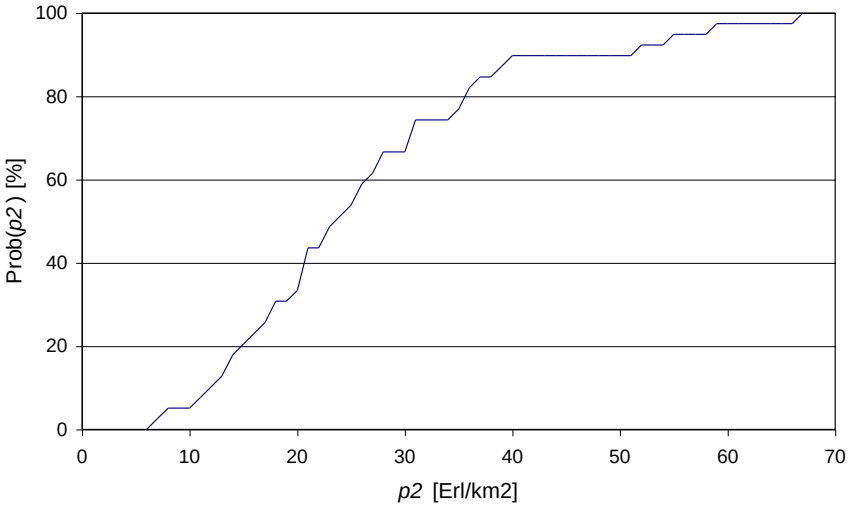


Figura D.1 – Distribuição do parâmetro p_2 do modelo duas gaussianas para a classe C.

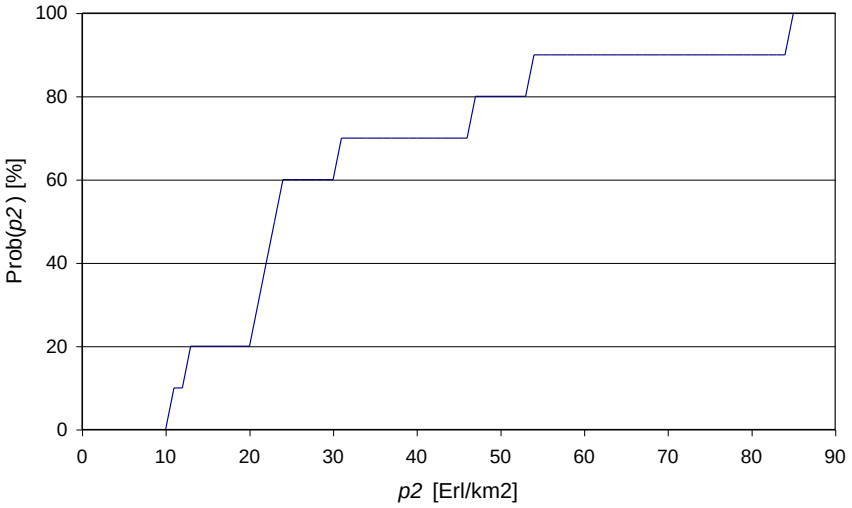


Figura D.2 – Distribuição do parâmetro p_2 do modelo duas gaussianas para a classe CE.

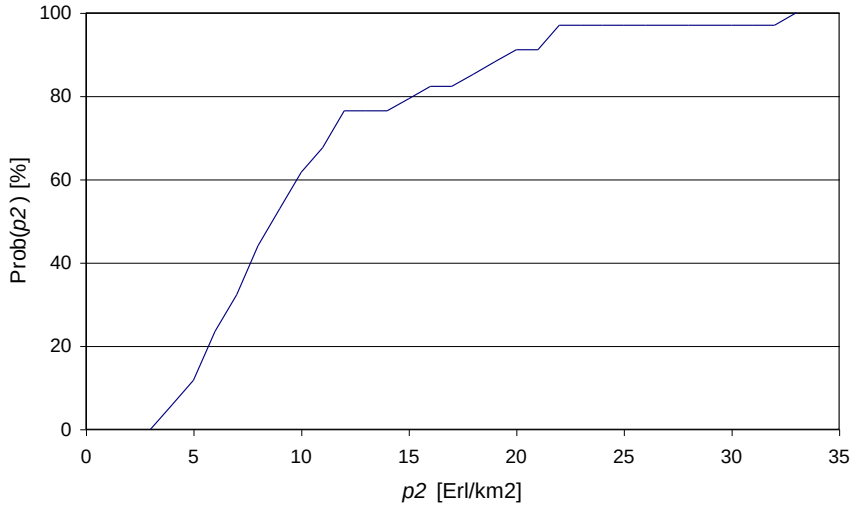


Figura D.3 – Distribuição do parâmetro p_2 do modelo duas gaussianas para a classe R.

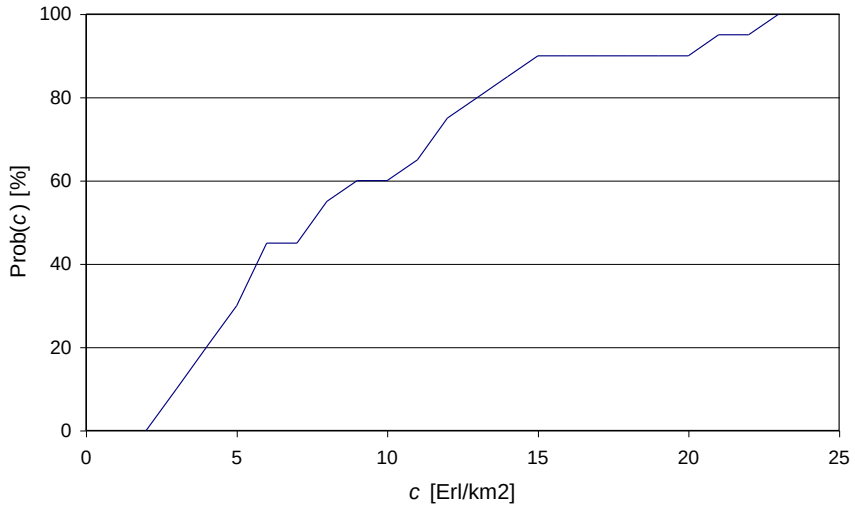


Figura D.4 – Distribuição do parâmetro *c* do modelo trapézio para a classe R.

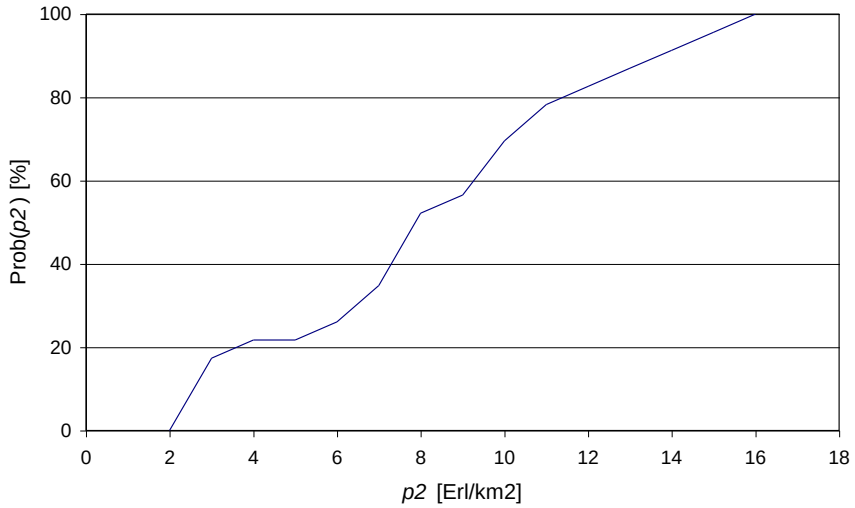


Figura D.5 – Distribuição do parâmetro p_2 do modelo duas gaussianas para a classe RE.

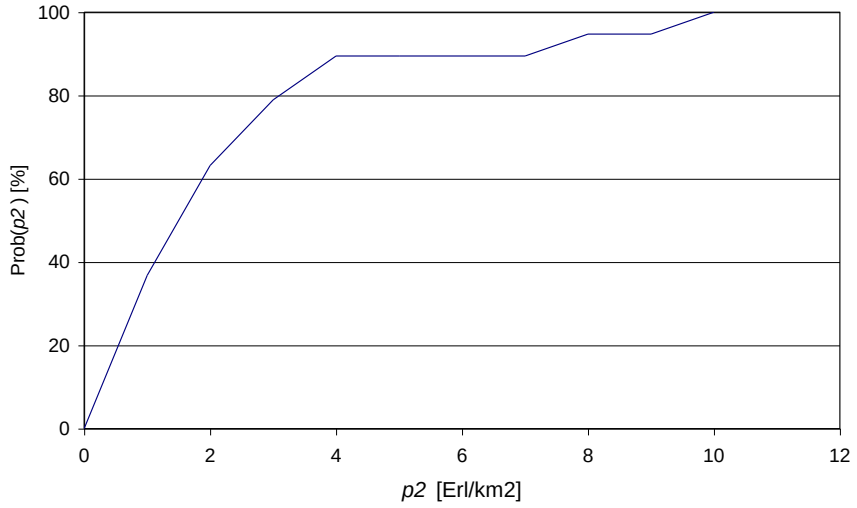


Figura D.6 – Distribuição do parâmetro p_2 do modelo duas gaussianas para a classe S.

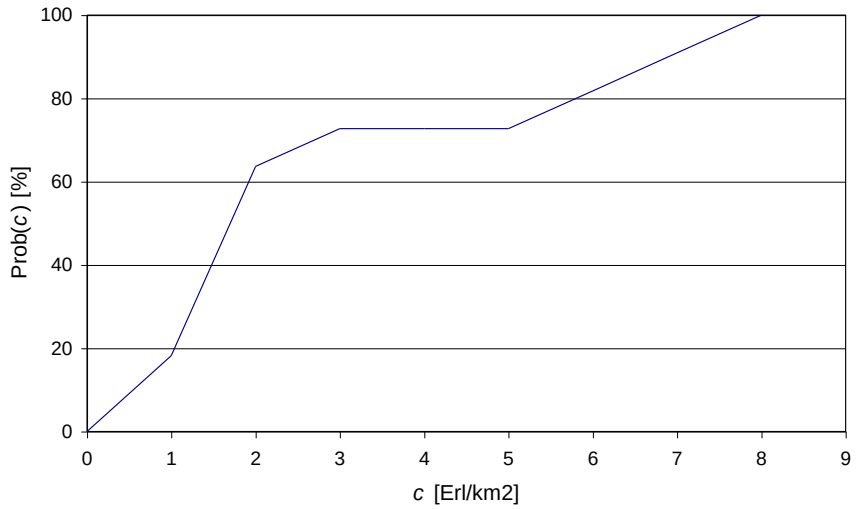


Figura D.7 – Distribuição do parâmetro *c* do modelo trapézio para a classe S.

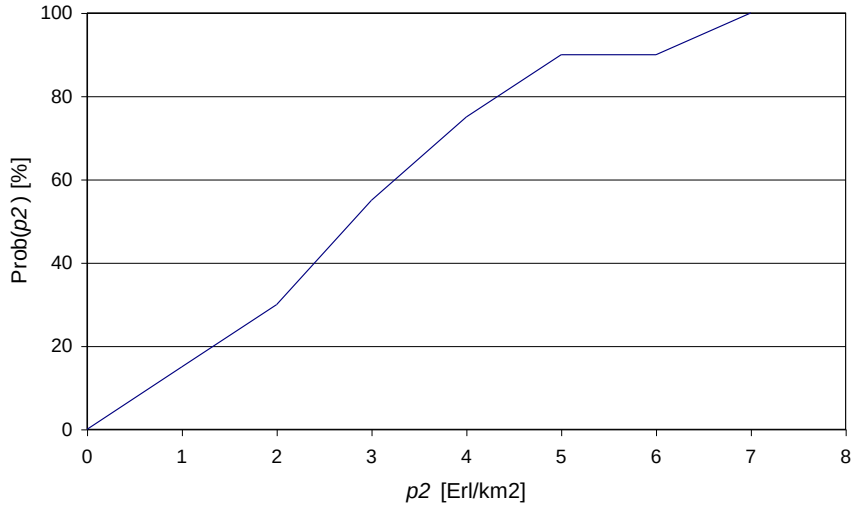


Figura D.8 – Distribuição do parâmetro p_2 do modelo duas gaussianas para a classe SE.

Anexo E

Perfis de Densidade de Tráfego e

Médias por Sector

Neste anexo apresentam-se os perfis de densidade de tráfego para os três sectores considerados bem como a sua média. Os perfis são definidos a partir do centro do mapa de densidade de tráfego numa dada direcção, por amostras intervaladas de 250 m. Foram considerados 36 perfis com intervalos de 10º entre si.

Nas Figuras E.1 a E.3 apresentam-se os perfis e respectiva média para cada sector, encontrando-se na Figura E.4 uma comparação entre as médias apresentadas para os três sectores.

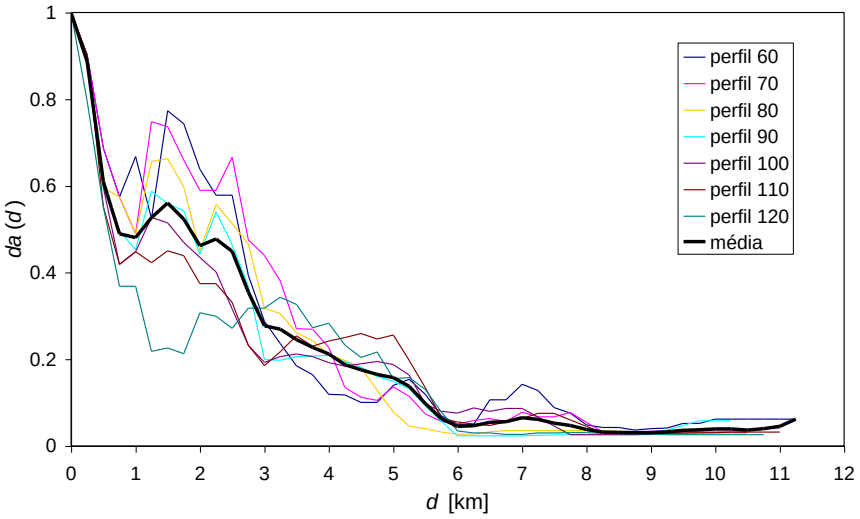


Figura E.1 – Perfis e respectiva média para o sector Norte às 17h.

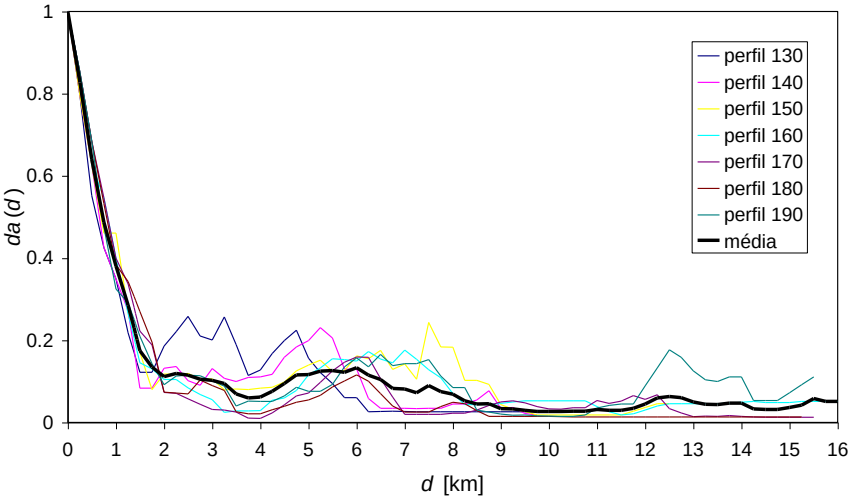


Figura E.2 – Perfis e respectiva média para o sector Oeste às 17h.

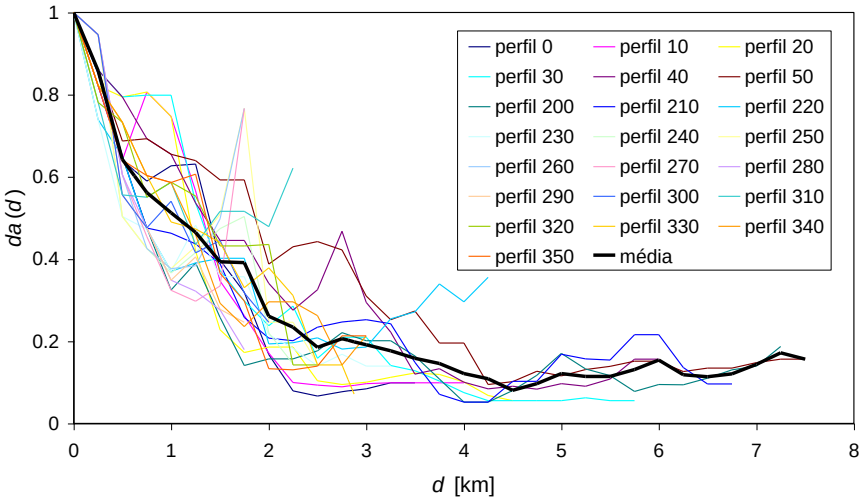


Figura E.3 – Perfis e respectiva média para o sector Sul & Este às 17h.

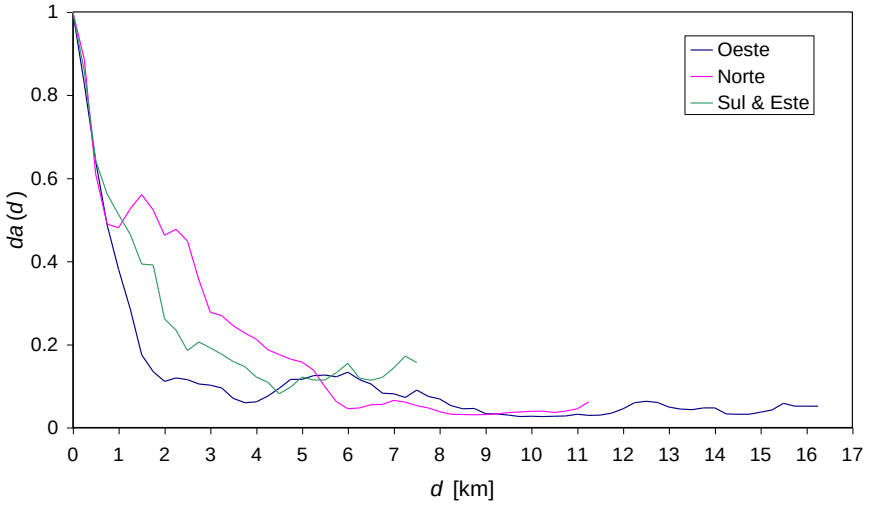


Figura E.4 – Médias dos perfis para os três sectores às 17h.

Anexo F

Estatística dos Erros dos
Modelos de Distribuição Espacial da Densidade de Tráfego

Neste anexo analisam-se os erros dos modelos de distribuição espacial da densidade de tráfego.

Os modelos foram obtidos a partir da aproximação de uma função à média dos perfis que constituem um sector, pelo que existem erros inerentes tanto à passagem dos perfis para a média do sector, como à aproximação da média pelo modelo. Para efectuar esta análise, efectuou-se a diferença ponto-a-ponto entre os diferentes perfis e o modelo para o sector, analisando, em seguida a sua distribuição para os diferentes sectores.

O erro de aproximação, $e(d)$, para o perfil n à distância d do centro é dado por:

$$e(d) = da_{perfil\_n}(d) - mod(d) \qquad \text{(F.1)}$$

onde:

$de_{perfil\_n}(d)$ é a densidade de tráfego normalizada no ponto em análise;

$mod(d)$ é o modelo para o sector respectivo à distância d.

Apresentam-se nas Figuras F.1 a F.6, as funções densidade de probabilidade e distribuição de $e(d)$, para os três sectores às 17h.

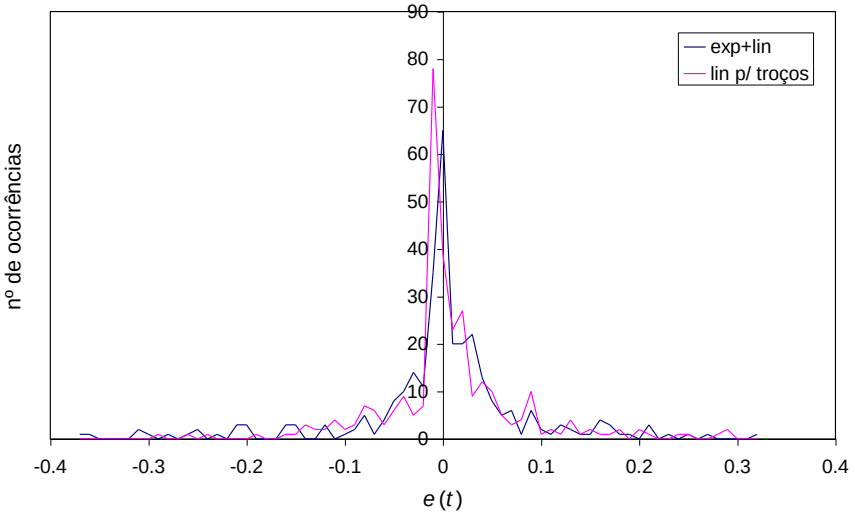


Figura F.1 – Número de ocorrências de $e(t)$ para o sector Norte às 17h.

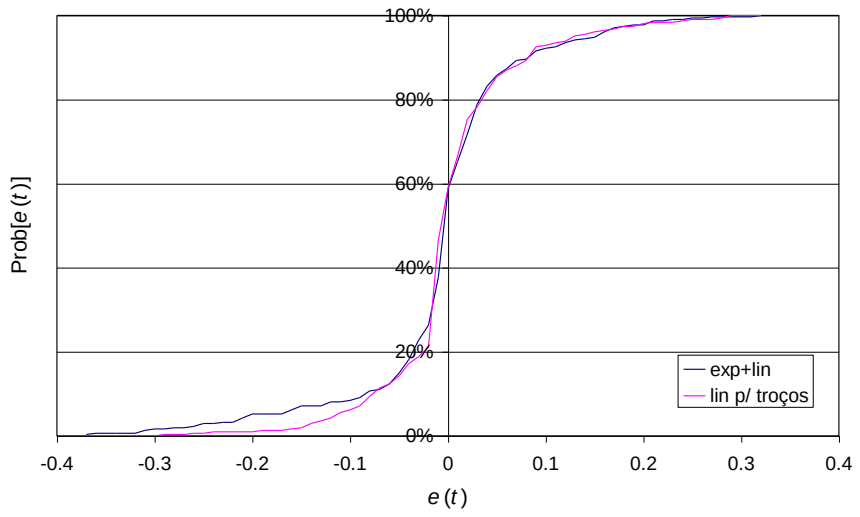


Figura F.2 – Distribuição de $e(t)$ para o sector Norte às 17h.

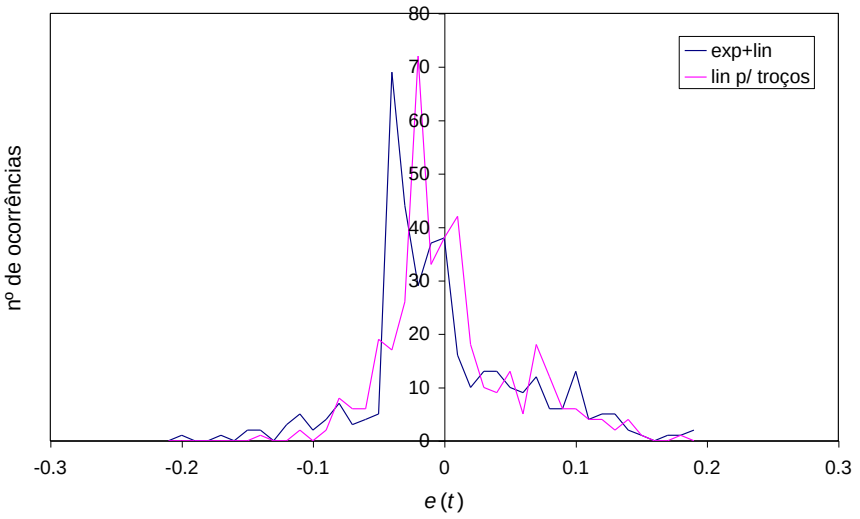


Figura F.3 – Número de ocorrências de $e(t)$ para o sector Oeste às 17h.

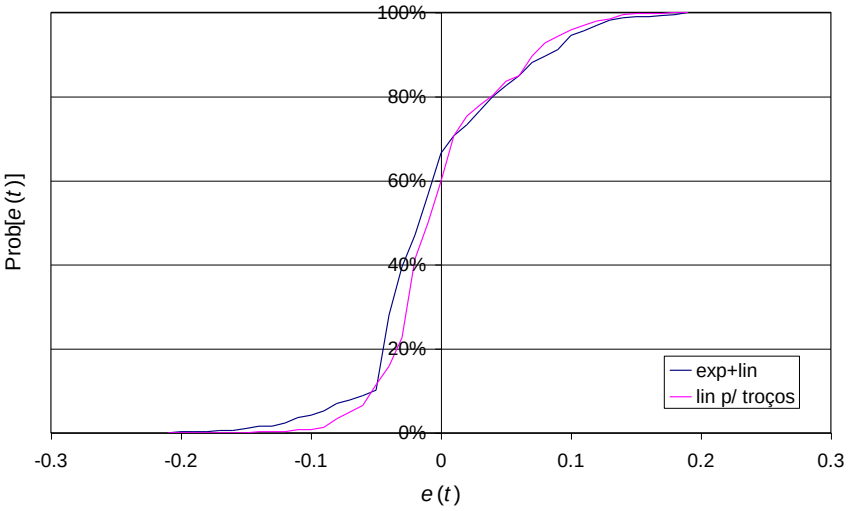


Figura F.4 – Distribuição de $e(t)$ para o sector Oeste às 17h.

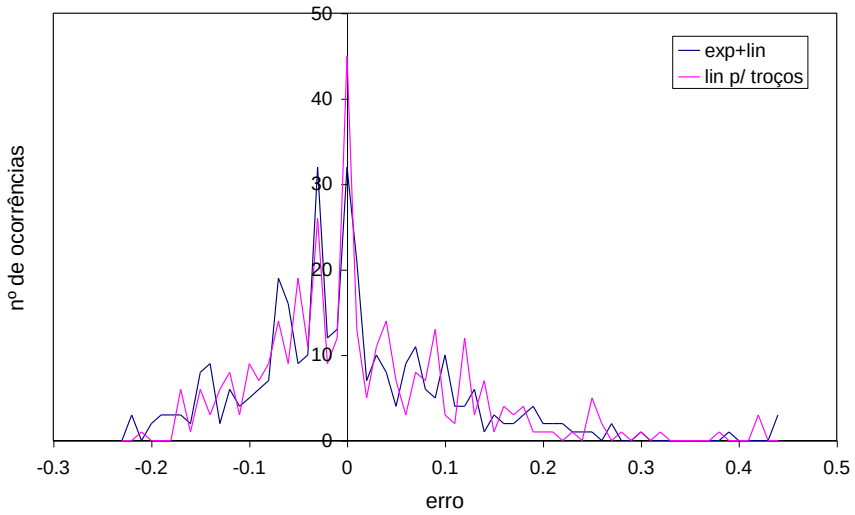


Figura F.5 – Número de ocorrências de *e*(*t*) para o sector Sul & Este às 17h.

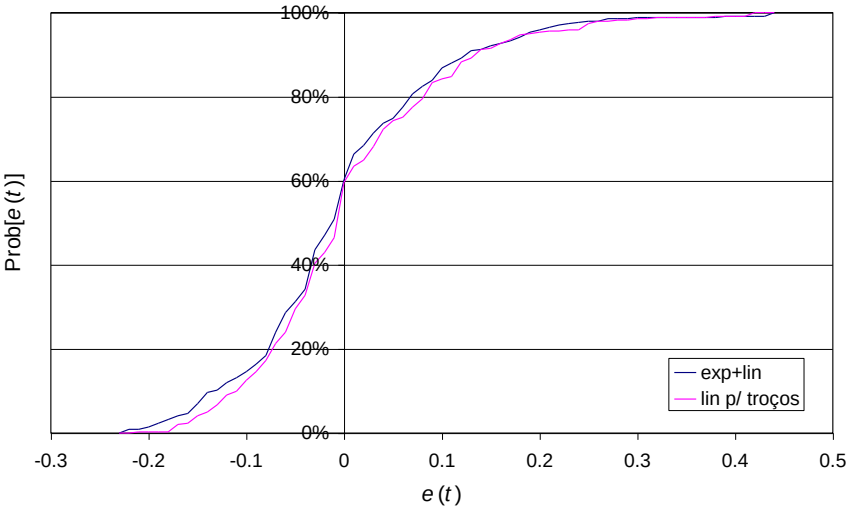


Figura F.6 – Distribuição de *e*(*t*) para o sector Sul & Este às 17h.

Anexo G

Variação Temporal da Distribuição Espacial

Neste Anexo apresentam-se os resultados das aproximações às curvas de densidade de tráfego, usando as funções exponencial / linear e linear por troços para várias horas do dia.

i) Aproximação exponencial / linear:

$$\mathrm{mod}_{\mathrm{el}}(d) = \begin{cases} e^{-d/Del} & d \le dq \\ Cel & d > dq \end{cases} \tag{G.1}$$

onde:

Del é o factor de decaimento da função exponencial / linear;

dq é o ponto de quebra da função exponencial / linear;

Cel é a constante da função exponencial / linear.

ii) Aproximação linear por troços:

$$\mathrm{mod}_{\mathrm{lt}}(d) = \begin{cases} 1 - Alt \cdot d & d \le dq_1 \\ Blt - Clt \cdot d & dq_1 < d \le dq_2 \\ Dlt & d > dq_2 \end{cases} \tag{G.2}$$

onde:

Alt é o declive do primeiro troço da função linear por troços;

dq_1 é o primeiro ponto de quebra da função linear por troços;

Blt é a constante do segundo troço da função linear por troços;

Clt é o declive do segundo troço da função linear por troços;

dq_2 é o segundo ponto de quebra da função linear por troços;

Dlt é a constante da função linear por troços.

Apresentam-se de seguida, nas Tabelas A.1 e A.2, os parâmetros das aproximações para diferentes horas.

Tabela G.1 – Valores finais da aproximação exponencial / linear para os três sectores para diferentes horas do dia.

Sector	*t* [h]	*Del* [km]	*Cel*	*dq* [km]	$\overline{e.q.m.}$
Sul & Este	0	2.640	0.180	4.533	0.063
	9	1.449	0.165	2.610	0.047
	11	1.732	0.148	3.315	0.035
	13	1.810	0.134	3.631	0.029
	17	1.572	0.131	3.201	0.031
	19	1.635	0.132	3.315	0.028
	22	2.502	0.192	4.125	0.042
Oeste	0	1.294	0.102	2.952	0.051
	9	0.994	0.077	2.545	0.037
	11	1.024	0.072	2.692	0.035
	13	1.125	0.066	3.055	0.037
	17	1.220	0.060	3.429	0.038
	19	1.242	0.070	3.308	0.035
	22	1.344	0.115	2.901	0.057
Norte	0	3.075	0.068	8.274	0.102
	9	2.483	0.052	7.358	0.071
	11	2.577	0.046	7.943	0.059
	13	2.605	0.040	8.396	0.070
	17	2.383	0.038	7.800	0.060
	19	2.514	0.043	7.923	0.072
	22	3.217	0.077	8.252	0.109

Tabela G.2 – Valores finais da aproximação linear por troços para os três sectores para diferentes horas do dia.

Sector	t [h]	*Alt* [1/km]	*Blt*	*Clt* [1/km]	*Dlt*	dq_1 [km]	dq_2 [km]	$\overline{e.q.m.}$
Sul & Este	0	-0.570	0.830	-0.164	0.174	0.417	4.010	0.060
	9	-0.762	0.602	-0.143	0.159	0.643	3.093	0.036
	11	-0.656	0.733	-0.201	0.152	0.586	2.891	0.031
	13	-0.585	0.798	-0.233	0.143	0.572	2.817	0.029
	17	-0.682	0.706	-0.203	0.133	0.614	2.827	0.027
	19	-0.642	0.710	-0.200	0.139	0.657	2.855	0.029
	22	-0.470	0.897	-0.222	0.205	0.413	3.123	0.044
Oeste	0	-0.497	0.211	-0.013	0.070	1.633	10.525	0.032
	9	-0.739	0.208	-0.017	0.053	1.096	9.291	0.027
	11	-0.620	0.168	-0.012	0.048	1.368	9.927	0.027
	13	-0.550	0.148	-0.010	0.045	1.577	10.272	0.020
	17	-0.615	0.147	-0.011	0.041	1.411	9.933	0.022
	19	-0.520	0.186	-0.014	0.048	1.608	9.767	0.020
	22	-0.482	0.221	-0.013	0.083	1.660	10.611	0.039
Norte	0	-0.789	0.642	-0.083	0.078	0.507	6.783	0.064
	9	-0.786	0.619	-0.092	0.056	0.550	6.088	0.035
	11	-0.685	0.681	-0.106	0.052	0.552	5.922	0.037
	13	-0.771	0.653	-0.099	0.047	0.516	6.145	0.039
	17	-0.727	0.638	-0.101	0.043	0.577	5.910	0.031
	19	-0.758	0.628	-0.093	0.050	0.559	6.192	0.035
	22	-0.828	0.613	-0.072	0.080	0.512	7.413	0.066

Anexo H

Cálculo da Distribuição Populacional para o Concelho de Lisboa

Neste anexo faz-se uma estimativa da densidade populacional em hora de ponta para o Concelho de Lisboa.

Foram obtidos dados de demográficos, [H1], [H2], que consistem em: população residente e número de empregos por freguesia, número de pessoas que entram e saem diariamente do Concelho e ainda um mapa do concelho com as diversas freguesias.

O número de pessoas em Lisboa, Pop_{Total}, em hora de ponta, foi obtido somando à população residente, *Res* (663 mil pessoas), a diferença entre as entradas, *Ent*, e saídas, *Sai* (309 mil pessoas):

$$Pop_{Total} = Res + (Ent - Sai) \tag{H.1}$$

Lisboa é uma cidade que concentra as suas actividades no sector de serviços, como tal, assumiu-se que as freguesias com maior número de empregos atraem um maior número de pessoas. Assim, a distribuição da população pelas diferentes freguesias foi feita de modo proporcional ao seu número de empregos:

$$Pop_{freg} = Pop_{Total} \cdot \frac{Nemp_{freg}}{Nemp_{Total}} \tag{H.2}$$

onde:

Pop_{freg} é a população da freguesia em hora de ponta;

$Nemp_{freg}$ é o número de empregos por freguesia;

$Nemp_{Total}$ é o número de empregos total no Concelho;

Finalmente, e para efectuar uma comparação directa com os mapas de densidade de tráfego, obteve-se a densidade populacional por freguesia, fazendo, em seguida, a correspondência com um mapa do Concelho de Lisboa com elementos de área quadrados com 250 m de lado.

Os cálculos apresentam-se na Tabela H.1, encontrando-se o mapa de densidade populacional respectivo representado na Figura H.1.

Tabela H.1 – Cálculo da densidade populacional para o Concelho de Lisboa.

Freguesia	Área [km2]	$Nemp_{freg}$	Pop_{freg}	Dens. Pop. [pessoas/km^2]
Ajuda	3.147	3300	6145	1953
Alcântara	4.386	14700	27373	6241
Alto do Pina	0.824	4500	8379	10169
Alvalade	0.578	6700	12476	21585
Ameixoeira	1.622	1700	3166	1952
Anjos	0.478	6000	11173	23374
Beato	1.407	5400	10055	7147
Benfica	7.937	13200	24580	3097
Campo Grande	2.438	13600	25325	10387
Campolide	2.79	10600	19738	7075
Carnide	4.017	4900	9124	2271
Castelo	0.054	200	372	6897
Charneca	1.704	2200	4097	2404
Coração de Jesus	0.542	26200	48787	90013
Encarnação	0.148	5400	10055	67942
Graça	0.341	2900	5400	15836
Lapa	0.721	7600	14152	19628
Lumiar	6.282	13000	24207	3853
Madalena	0.111	5700	10614	95622
Mártires	0.096	4800	8938	93105
Marvila	6.294	17300	32214	5118
Mercês	0.303	1900	3538	11677
Nossa Senhora de Fátima	1.866	41900	78022	41812
Pena	0.494	12100	22531	45610
Penha de França	0.664	3000	5586	8413
Prazeres	1.482	11200	20856	14073
Sacramento	0.081	2900	5400	66668
Santa Catarina	0.209	3800	7076	33856
Santa Engrácia	0.567	3300	6145	10838

Tabela H.1 – Cálculo da densidade populacional para o Concelho de Lisboa (cont).

Freguesia	Área [km2]	$Nemp_{freg}$	Pop_{freg}	Dens. Pop. [pessoas/km^2]
Santa Isabel	0.619	15400	28676	46327
Santa Justa	0.238	10000	18621	78240
Santa Maria de Belém	3.388	8500	15828	4672
Santa Maria dos Olivais	10.66	27100	50463	4733
Santiago	0.062	500	931	15017
Santo Condestável	1.011	5800	10800	10683
Santo Estevão	0.183	1900	3538	19333
Santos-o-Velho	0.508	7000	13035	25659
São Cristóvão e São Lourenço	0.077	900	1676	21765
São Domingos de Benfica	4.296	12800	23835	5548
São Francisco Xavier	2.102	3600	6704	3189
São João	1.564	4200	7821	5001
São João de Brito	2.275	20000	37242	16370
São João de Deus	0.902	19200	35752	39637
São Jorge de Arroios	1.134	40300	75043	66175
São José	0.34	7500	13966	41076
São Mamede	0.596	15900	29607	49677
São Miguel	0.058	1200	2235	38526
São Nicolau	0.247	22700	42270	171133
São Paulo	0.406	12000	22345	55038
São Sebastião da Pedreira	1.054	30600	56980	54061
São Vicente de Fora	0.308	1600	2979	9673
Sé	0.121	2400	4469	36934
Socorro	0.108	1000	1862	17242
Total	83.84	522100	972204	11596

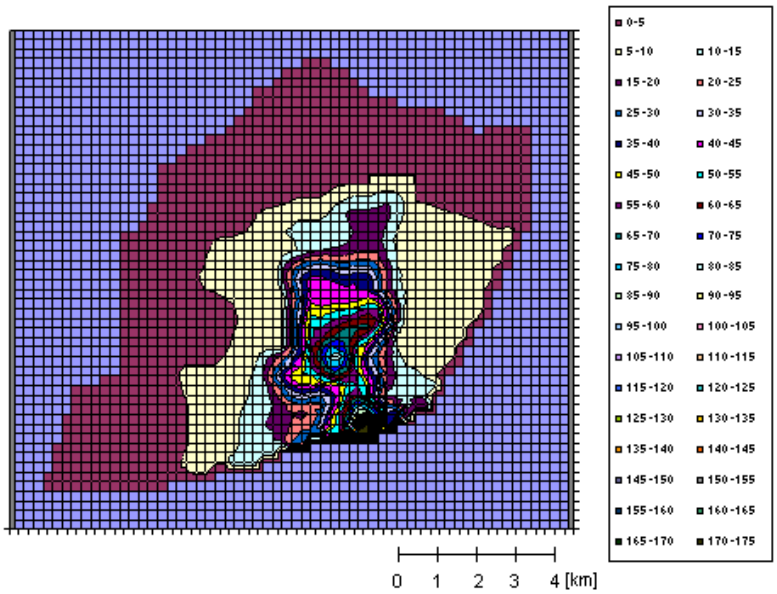


Figura H.1 – Densidade populacional para o Concelho de Lisboa [mil pessoas/km^2].

Referências

[H1] *Censos – Recenseamento da População e Habitação – Resultados Definitivos, 1991*, Instituto Nacional de Estatística, 1994.

[H2] http://ulisses.cm-lisboa.pt.htm

Errata

	Onde se lê:	Deve ler-se:
Pág. ix	… 2.38 Erl/km^2,	… 2. 38 km,
Pág. ix	… 0.7 (Erl/km^2)/km.	… 34 (Erl/km^2)/km.
Pág. C - 6	Figura C.2	Figura C.3